



主　编　王明斌　庞永平
副主编　付　聪　刘振宇



· 将传统知识进行整合，删减能量法和动荷载内容
· 以应用为目的，简略过多高等数学推导





北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

说　明

本书电子版仅提供给高校任课教师使用，如有任课教师需要全本教材浏览或需要本书课件等相关教学资料，请联系北京大学出版社客服，微信手机同号：15600139606，扫下面二维码可直接联系。

由于教材版权所限，仅限任课教师索取，谢谢！



21世纪全国本科院校土木建筑类创新型应用人才培养规划教材

工 程 力 学

主　编　王明斌　庞永平
副主编　付　聪　刘振宇



内容简介

本书是21世纪全国本科院校土木建筑类创新型应用人才培养规划教材，是土木工程专业重要基础课教材之一。本书在编写过程中，根据我国高等教育和教学改革的发展趋势以及素质教育与创新精神培育的要求，同时注意吸取国内外同类教材的经验，充分反映近年来力学教学第一线的新成果及新经验。

本书分静力学和材料力学两篇。静力学篇包括静力学的基本概念与受力分析、平面汇交力系、平面力偶系、平面一般力系、摩擦、空间力系6章；材料力学篇包括绪论和基本概念、轴向拉伸和压缩、剪切、扭转、弯曲内力、截面的几何性质、弯曲应力、弯曲变形、应力状态和强度理论、组合变形的强度计算、压杆稳定11章。每章附有思考题和习题，书后附有型钢表和参考答案。

本书可作为普通高等学校土建类专业教学用书，也可作为独立学院、高职高专与成人高校的教材，还可作为有关工程技术人员学习参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

工程力学/王明斌，庞永平主编. —北京：北京大学出版社，2011.10
(21世纪全国本科院校土木建筑类创新型应用人才培养规划教材)
ISBN 978-7-301-19530-7

Ⅰ.①工… Ⅱ.①王…②庞… Ⅲ.①工程力学—高等学校—教材 Ⅳ.①TB12

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第192862号

书　　名： 工程力学
著作责任者： 王明斌　庞永平　主编
策 划 编 辑： 卢　东　吴　迪
责 任 编 辑： 卢　东
标 准 书 号： ISBN 978-7-301-19530-7/TU·0186
出　版　者： 北京大学出版社
地　　址： 北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址： http://www.pup.cn　http://www.pup6.cn
电　　话： 邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62750667　出版部62754962
电 子 邮 箱： pup_6@163.com
印　刷　者：
发　行　者： 北京大学出版社
经　销　者： 新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　19.5印张　453千字
2011年10月第1版　　2013年12月第2次印刷
定　　价： 37.00元

前　　言

人才培养是高校的首要任务，现代社会既需要研究型人才，也需要大量在生产领域解决实际问题的应用型人才，作为知识传承、能力培养和课程建设载体的教材在应用型高校的教学活动中起着至关重要的作用，但目前“应用型”教材的建设和发展却远远滞后于应用型人才培养的步伐。

本书根据应用型本科土木建筑类各专业的“工程力学”课程要求编写，包括静力学和材料力学两部分，在沿用传统体系的基础上，对部分内容进行了精简，加强了与专业及工程应用相结合，强调实用性。通过本课程的学习，学生获得静力学方面的受力分析、力系简化、各种力系的平衡方程、摩擦问题及重心、形心的知识；并获得固体力学的入门知识，即综合几何、物理、静力三方面知识的基本分析方法与杆件和简单的杆系结构的强度、刚度、稳定性方面的知识，培养学生分析问题和解决问题的能力以及实验动手能力。同时，为进一步学习结构力学、结构设计原理等相关专业课打好基础。编者在编写过程中力求做到以下几点。

(1) 体系新颖。编写体系范围内，有关工程力学基本内容均已涉及，但舍弃了一些过深而又不实用的内容。以读者为本，以本科教学为主，以理论严谨、逻辑清晰、由浅入深为基本原则。本书最大的特点为要点突出，便于教学，专业对口性强。

(2) 内容紧凑。书中内容在介绍时注意交待来龙去脉，由浅入深，推导论证详而不繁，突出了应用的条件和前提。例题注重对解题思路的引导、公式的正确应用和对结果合理性的分析。

(3) 应用性强。每章有教学提示、学习要求、本章小结，同时附有难度和数量适度的习题，习题既有足够的基本题，又包含了一些思考性及综合性的题目。本书适用于高等工科院校四年制土建、交通、水利等相关专业，也适用于其他专业，总学时数在 100 学时左右。

本书由鲁东大学土木工程学院的教师编写。第 1～6 章静力学部分由庞永平编写，第 8 章和第 11 章由付聪老师编写，第 7、9、10、12 章由刘振宇老师编写，第 13 至第 17 章以及附录、参考文献等部分由王明斌老师编写。全书由王明斌、庞永平担任主编，付聪、刘振宇担任副主编，全书由王明斌统稿。

由于编者水平所限，书中疏漏与不足之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编者

2011 年 6 月

目　　录


北京大学出版社版权所有
禁止转载

第1篇

静　力　学

引　言

物体在空间的位置随时间的改变而改变，称为机械运动，这是人们在日常生活和生产实践中最常见的一种运动形式。

静力学研究的是物体在力系作用下的平衡规律。也就是说，研究物体受到力系以后符合什么条件才能平衡。所谓“平衡”是指物体相对于地球保持静止或做匀速直线运动。如桥梁、楼房、做匀速直线飞行的飞机等，都处于平衡状态。平衡是物体机械运动的一种特殊形式。

力系是指作用于物体上的一群力，在静力学中，将研究以下 3 个方面的问题

(1) 物体的受力分析。分析某个物体上共受几个力以及每个力的方向和作用位置。

(2) 力系的简化。把作用在物体上的一个力系用另一个与它等效的力系来代替，这两个力系互为等效力系。用一个简单力系等效地替换另一个复杂力系称为力系的简化。

(3) 建立各种力系的平衡条件。研究物体平衡时，作用在物体上的各种力系所需满足的条件即平衡条件。工程中常见的力系，按其作用线所在的位置，可分为平面力系和空间力系两大类。不同的力系，它的平衡条件也各不相同。满足平衡条件的力系称为平衡力系。

力系的平衡条件在工程中有着十分重要的意义，是设计结构、构件时进行静力计算的基础。因此，静力学在工程中有着最为广泛的应用。

第1章 静力学的基本概念与受力分析

【教学提示】

本章主要介绍静力学中的一些基本概念和5个公理。这些概念和公理是静力学的基础。还将介绍物体的受力分析和受力图的画法，它是解决静力学问题的关键。

【学习要求】

通过本章的学习，记住并理解刚体和力的概念以及静力学公理。重点是掌握物体的受力分析及受力图的画法。

1.1 刚体和力的概念

1. 刚体的概念

所谓刚体是指在力的作用下，其大小和形状始终保持不变的物体。显然这是一个理想化的力学模型。实际物体在力的作用下都会产生不同程度的变形，但是，这些微小的变形有时对研究物体的平衡不起主要作用，可以忽略不计，这样可使问题的研究大为简化。因此，刚体只是为了研究问题的方便而抽象出来的一种力学模型。

静力学研究的物体只限于刚体，故又称为刚体静力学，它是研究变形体力学的基础。

2. 力的概念

力的概念是人们在生活和生产实践中通过长期的观察和分析而提出来的。例如，抬物体的时候，物体压在肩上，由于肌肉紧张而感受到力的作用；用手推小车，小车就由静止开始运动；用手拉弹簧，弹簧发生了形变，同时也感受到弹簧也在拉手等。人们就是从这样大量的实践中，从感性到理性，逐步地建立起力的概念。所以，力是物体间的相互机械作用，这种作用使物体的机械运动状态发生改变，或者使物体发生变形。

因此，力不能脱离物体而存在。虽然看不见力，但它的作用效应完全可以直接观察，或用仪器测量出来。人们也正是从力的作用效应来认识力本身的。正如恩格斯所指出的："力以它的表现来量度"。

力使物体运动状态发生变化的效应，称为力对物体的外效应。而力使物体发生变形的效应称为力对物体的内效应。静力学只研究力的外效应，而材料力学将研究力的内效应。

由经验可知，力对物体的效应取决于3个要素：力的大小，力的方向，力的作用点，通常称为力的三要素。当这3个要素中的任何一个改变时，力的作用效应也就不同。

力是一个既有大小又有方向的量，因此力是矢量。在力学中，矢量可用一条带箭头

的有向线段来表示，如图 1.1 所示。用线段的起点或终点表示力的作用点；用线段的箭头指向表示力的方向；用线段的长度(按一定的比例尺)表示力的大小。通过力的作用点沿力的方向的直线，称为力的作用线。在本书中，力的矢量用黑斜体字母 **F** 表示，而力的大小则用普通字母 F 表示。

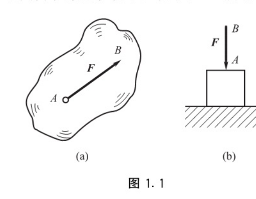


图 1.1

在国际单位制(SI)中，以“N”作为力的单位符号，称为牛［顿］。有时也以“kN”作为力的单位符号，称为千牛［顿］。$1N=1kg\cdot m/s^2$。

1.2 静力学公理

静力学公理是人们在长期的生活和生产实践中总结出来的。这些公理简单而明显，无须证明而被大家公认，它们是静力学的基础。

公理一　二力平衡公理　作用于刚体上的两个力平衡的必要和充分条件是：这两个力大小相等，方向相反，并作用于同一直线上，如图 1.2 所示。

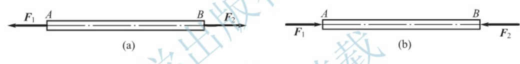


图 1.2

这个公理揭示了作用于物体上最简单的力系平衡时所必须满足的条件。对刚体来说，这个条件是必要且充分的；但对于变形体，这个条件是不充分的。如图 1.3 所示，软绳受两个等值反向的拉力时可以平衡，而受两个等值反向的压力时就不能平衡了。

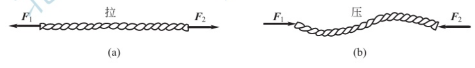


图 1.3

只在两个力作用下处于平衡的构件称为二力构件，如果构件是直的，称为二力杆。工程上存在着许多二力构件。二力构件的受力特点是，两个力必沿作用点的连线。如图 1.4 所示的三铰拱中的 BC 部分，在不计自重的情况下，就可以看成是二力构件。

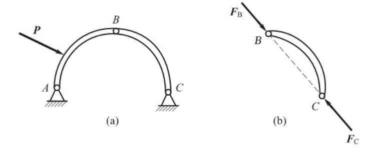


图 1.4

公理二　加减平衡力系公理　在作用在刚体上的任何一个力系上，加上或减去任一平衡力系，并不改变原力系对刚体的作用效应。

这是显而易见的，因为平衡力系对刚体的平衡或运动状态是没有影响的。这个公理常被用在力系的简化上。

推论1　力的可传性原理　作用于刚体上的力，可以沿其作用线移至刚体内任意一点，而不改变它对刚体的作用效应。例如，人们在车后 A 点推车，与在车前 B 点拉车，效应是一样的，如图1.5所示。这个推论也可以由公理二来推证，留给读者自行推证。

由以上可知，作用于刚体上的力的三要素是力的大小、方向和作用线。

应该注意，力的可传性原理只适用于刚体，而不适用于变形体。如图1.6所示的变形杆 AB，图1.6(a)中杆被拉长。如果把这两个力沿作用线分别移到杆的另一端，如图1.6(b)所示，此时杆就被压短了。

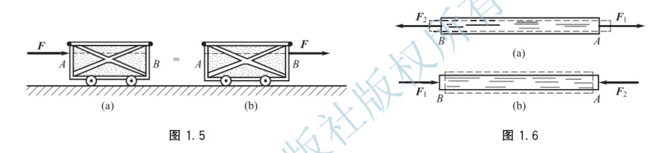


图1.5　　　　图1.6

公理三　力的平行四边形法则　作用于物体上同一点的两个力，可以合成为一个合力。合力的作用点仍在该点，合力的大小和方向以这两个力为邻边所构成的平行四边形的对角线来表示，如图1.7所示。

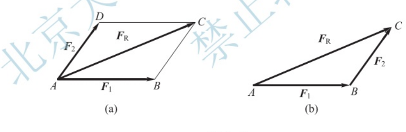


图1.7

这种合成力的方法称为矢量加法，合力称为这两个力的矢量和。用式子表示为

$$\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2 \tag{1-1}$$

应该指出，式(1-1)是矢量等式，它与代数等式 $F_R=F_1+F_2$ 的意义完全不同。

为了方便，在用矢量加法求合力时，往往不必画出整个的平行四边形，如图1.7(b)所示，可从 A 点作一个与力 $\boldsymbol{F}_1$ 大小相等、方向相同的矢量 $\overrightarrow{AB}$，过 B 点作一个与力 $\boldsymbol{F}_2$ 大小相等、方向相同的矢量 $\overrightarrow{BC}$，则矢量 $\overrightarrow{AC}$ 即表示力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{F}_R$，这种求合力的方法称为力三角形法则。

平行四边形法则既是力的合成的法则，也是力的分解的法则。

推论2　三力平衡汇交定理　作用于刚体上3个相互平衡的力，若其中两个力的作用线汇交于一点，则这3个力必在同一平面内，且第三个力的作用线通过汇交点。

证明：如图1.8所示，在刚体的 A、B、C 这3点上，分别作用3个相互平衡的力 $\boldsymbol{F}_1$、

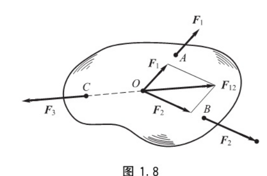


图 1.8

$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$。根据力的可传性，将力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 移到汇交点 O，然后根据力的平行四边形法则，得合力 $\boldsymbol{F}_{12}$，则力 $\boldsymbol{F}_3$ 应与力 $\boldsymbol{F}_{12}$ 平衡。由于两个力平衡必须共线，所以力 $\boldsymbol{F}_3$ 必定与力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 共面，且通过力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的交点 O，于是定理得证。

公理四　作用与反作用定律　作用力和反作用力总是同时存在，两个力的大小相等、方向相反、沿着同一直线，分别作用在两个相互作用的物体上。

这个公理概括了物体间相互作用的关系，表明作用力和反作用力总是成对出现的。举一例子说明，如图 1.9(a)所示，放置在基座上的电动机，受重力 $\boldsymbol{P}$ 和基座的两个反力 $\boldsymbol{F}_{N1}$ 和 $\boldsymbol{F}_{N2}$ 的作用［图 1.9(b)］。

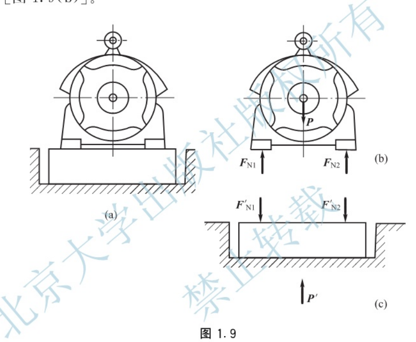


图 1.9

重力 $\boldsymbol{P}$ 是地球对电动机的吸引力，作用在电动机上；同时，电动机对地球也有一个吸引力 $\boldsymbol{P}'$ 作用在地球上［图 1.9(c)］，这两个力是作用力和反作用力，两者等值，反向共线，即 $\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{P}'$。此外，电动机对基座也作用两个压力 $\boldsymbol{F}'_{N1}$ 和 $\boldsymbol{F}'_{N2}$，其中力 $\boldsymbol{F}_{N1}$ 与 $\boldsymbol{F}'_{N1}$ 是作用力与反作用力的关系，即 $\boldsymbol{F}_{N1}=-\boldsymbol{F}'_{N1}$、$\boldsymbol{F}_{N2}=-\boldsymbol{F}'_{N2}$。后面作用力与反作用力将用同一字母表示，但其中之一在字母的右上方加“′”。

必须强调指出，由于作用力与反作用力分别作用在两个物体上，因此，不能认为作用力与反作用力相互平衡。

公理五　刚化原理　变形体在某一力系作用下处于平衡，若将变形体刚化为刚体，其平衡状态不变。

这个公理提供了把变形体看做刚体模型的条件。如图 1.10 所示，绳索在等值、反向、共线的两个拉力作用下处于平衡，如将绳索刚化成刚体，其平衡状态保持不变。若绳索在两个等值、反向、共线的压力作用下并不能平衡，这时绳索就不能刚化为刚体。但刚体在上述两种力系的作用下都是平衡的。也就是说把物体刚化成刚体也是有条件的。

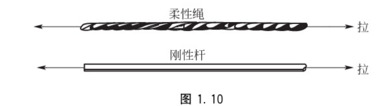


图 1.10

1.3 约束和约束反力

有些物体在空间的位置不受任何限制。位移不受限制的物体称为自由体。相反有些物体在空间的位移却要受到一定的限制。如机车受铁轨的限制，只能沿铁轨运动；重物由钢索吊住，不能下落等。位移受到限制的物体称为非自由体。对非自由体的某些位移起限制作用的物体称为约束。例如，铁轨对于机车，钢索对于重物等，都是约束。

既然约束能够阻碍物体发生位移，也就是约束能够起到改变物体运动状态的作用，所以约束与被约束之间必然存在着力，这种力是约束给被约束的，所以称为约束反力。因此，约束反力的方向必然与被约束物体运动方向或运动趋势的方向相反。应用这个准则，可以确定约束反力的方向或作用线的位置，至于约束反力的大小则是未知的。在静力学中，约束反力和物体受的其他已知力(称为主动力)组成平衡力系，因此可用平衡条件求出未知的约束反力。

由此看来，解静力学问题，主要是求解未知的约束反力，而约束反力又与约束类型有关，下面介绍几种在工程中常见到的简单的约束类型和确定约束反力方向的方法。

1. 具有光滑接触面的约束

例如，支撑物体的固定面［图 1.11(a)、(b)］，啮合齿轮的齿面(图 1.12)，铁路中的道轨与车轮等，当摩擦忽略不计时，都属于这类约束。

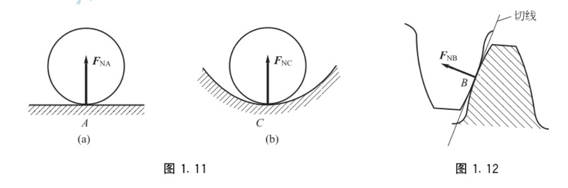


图 1.11　　图 1.12

这类约束不能限制物体沿约束表面切线的位移，只能阻碍物体沿接触面法线并向约束内部的位移。因此，光滑支撑面对物体的约束反力，作用在接触点处，方向沿着接触面的公法线，指向被约束物体，这种约束反力有时称为法向反力，通常用 $\boldsymbol{F}_{N}$ 表示，如图 1.11 中的 $\boldsymbol{F}_{NA}$、$\boldsymbol{F}_{NC}$ 和图 1.12 中的 $\boldsymbol{F}_{NB}$ 等。

2. 柔性约束

柔性约束是指由绳索、链条或胶带等一些柔软的物体形成的约束。绳子吊住重物，如

图 1.13(a)所示。由于柔软的绳子本身只能承受拉力［图 1.13(b)］，所以它给重物的约束反力也只能是拉力［图 1.13(c)］。因此，绳索对物体的约束反力作用在接触点上，方向沿着绳索，背离被约束物体。通常用 $\boldsymbol{F}$ 或 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ 表示这类约束反力。

链条或胶带也都只能承受拉力，当它们被绕在轮子上时，对轮子的约束反力沿着轮缘的切线方向，也是链条和胶带的方向，背离轮子，如图 1.14 所示。

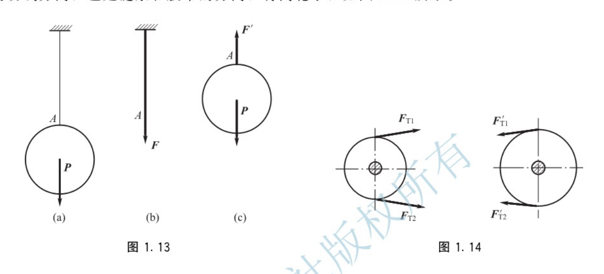


图 1.13　　图 1.14

3. 固定铰链约束

铰链是工程上常见的一种约束，铰链约束的典型构造是将构件和固定底座在连接处钻出圆孔，再用圆柱形销钉串联起来，使构件只能绕销钉的轴线转动，这种约束称为固定铰链约束，又称为固定铰支座，如图 1.15(a)、(b)所示。

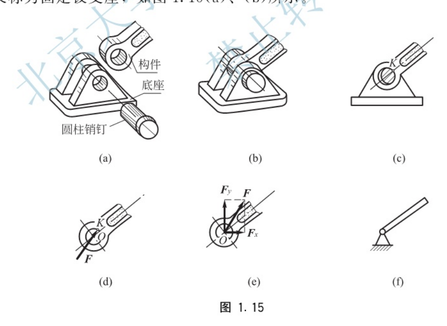


图 1.15

设接触面的摩擦忽略不计，则销钉与物体圆孔间的接触实际上是两个光滑圆柱面的接触［图 1.15(c)］。根据光滑面约束反力的性质可知，销钉给物体的约束反力 $\boldsymbol{F}$ 应该沿圆柱面在接触点 K 的公法线，并通过销钉中心 O，指向物体，如图 1.15(d)所示。但因接触点 K 的位置往往不能预先确定，所以约束反力 $\boldsymbol{F}$ 的方向也就不能预先确定，因此，通常用通过铰链中心的两个正交分力 $\boldsymbol{F}_x$ 和 $\boldsymbol{F}_y$ 来表示，如图 1.15(e)所示。而图 1.15(f)是固

定铰支座的简化表示法。

如果用圆柱形光滑销钉连接两个物体，则称为中间铰或圆柱铰链，如图 1.16(a)、(b)所示。中间铰的销钉对构件的约束与固定铰支座的销钉对构件的约束相同，其约束反力通常也用两个正交分力来表示，如图 1.16(c)所示。

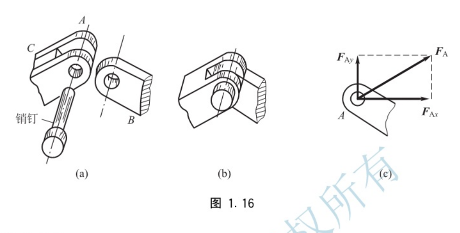


图 1.16

4. 可动铰链约束

将构件的铰链底座用几个辊轴支承在光滑平面上，就构成了可动铰链约束，也称为可动铰支座。如图 1.17(a)所示，其简图如图 1.17(b)所示。在桥梁、房屋等结构中常采用可动铰支座。它可以沿支承面移动，允许由于温度变化而引起结构跨度的自由伸长或收缩。显然，可动铰支座的约束性质与光滑面约束相同，其约束反力必垂直于支承面，且通过铰链中心。通常用 $\boldsymbol{F}_N$ 表示其法向约束反力，如图 1.17(c)所示。

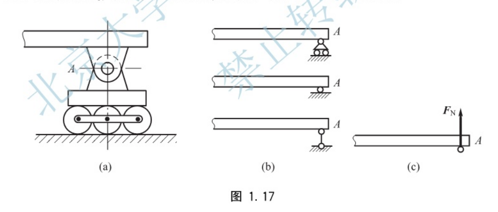


图 1.17

5. 轴承约束

轴承约束是工程中常用的支承形式。这类约束的约束反力的分析方法与铰链约束相同，常用的有滑动轴承和滚动轴承。图 1.18(a)是滑动轴承的示意图，图 1.18(b)给出了轴承的简图和约束反力。因为滑动轴承不能限制轴沿轴线方向的运动，所以滑动轴承约束反力的方向在垂直于轴线的纵向平面内，通常用两个正交分力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Az}$ 表示。

图 1.19(a)所示为滚动轴承最常见的两种形式，其简图如图 1.19(b)所示。A 端为向心轴承(或径向轴承)，因向心轴承和滑动轴承一样，不起止推作用，所以向心轴承的约束反力只有 $\boldsymbol{F}_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Az}$ 两个分力。B 端为向心推力轴承(或径向止推轴承)，它能起到轴向止推作用，所以向心推力轴承的约束反力有 $\boldsymbol{F}_{Bx}$、$\boldsymbol{F}_{By}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Bz}$ 3 个分力，如图 1.19(c)所示。

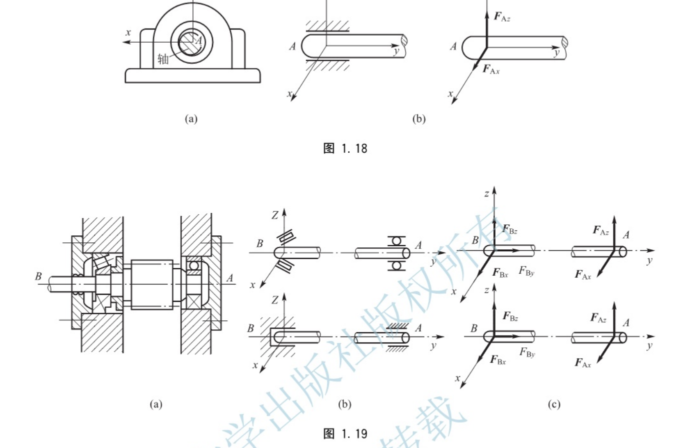


图 1.18

图 1.19

6. 球铰链约束

通过圆球和球壳将两个构件连接在一起的约束称为球铰链约束，如图 1.20(a)所示。汽车上换挡用的变速杆便是这种约束。它使构件的球心不能有任何位移，但构件可绕球心随意转动。若忽略摩擦，与圆柱铰链分析相似，其约束反力应是通过球心但方向不能预先确定的一个空间力，可用 3 个正交分力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$、$\boldsymbol{F}_{Ay}$、$\boldsymbol{F}_{Az}$表示，其简图及约束反力如图 1.20(b)所示。

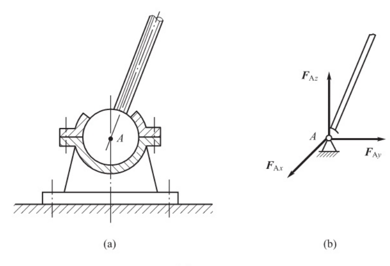


图 1.20

1.4 物体的受力分析和受力图

在静力学问题中，为了求出未知的约束反力，需要根据已知力，应用平衡条件求解。为此，要先确定构件受了几个力，每个力的作用位置和力的作用方向，这种分析过程称为对物体的受力分析。

作用在物体上的力可分为两类：一类是主动力，如物体的自重、风力、气体压力等，一般是已知的；另一类是约束给被约束物体的约束反力，为未知的被动力。

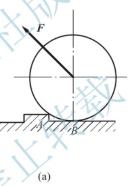
为了清晰地表示物体的受力情况，把需要研究的物体从周围的物体中分离出来，单独画出它的简图，这个步骤叫做取研究对象或取分离体。然后把施力物体对研究对象的作用力全部画出来，包括主动力和约束反力。这种表示物体受力的简图称为受力图。画物体的受力图是解决静力学问题的一个重要环节，下面举例说明。

例 1.1 用力 $\boldsymbol{F}$ 拉动碾子以压平路面，重为 $\boldsymbol{P}$ 的碾子受到一个石块的阻碍，如图 1.21(a)所示，试画出碾子的受力图。

解：(1) 取碾子为研究对象(即取分离体)并单独画出其简图。

(2) 画主动力。有地球的引力 $\boldsymbol{P}$ 和杆对碾子中心的拉力 $\boldsymbol{F}$。

(3) 约束反力。因碾子在 A 和 B 两处受到石块和地面的约束，如不计摩擦，均为光滑表面接触，故在 A 处受到石块的法向反力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{NA}}$ 的作用，在 B 处受到地面的法向反力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{NB}}$ 的作用，它们都沿着碾子上接触点的公法线指向圆心。碾子的受力图如图 1.21(b)所示。



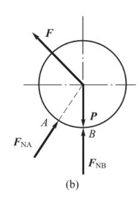
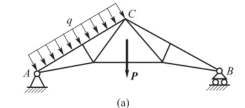


图 1.21

例 1.2 屋架如图 1.22(a)所示。A 处为固定铰链支座，B 处为可动铰链支座，搁在光滑的水平面上。已知屋架自重 $\boldsymbol{P}$，在屋架的 AC 边上承受了垂直于它的均匀分布的风力，单位长度上承受的力为 q，试画出屋架的受力图。



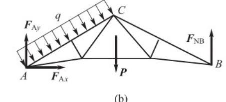


图 1.22

解：(1) 取屋架为研究对象，除去约束并画出其简图。

(2) 画主动力。有屋架的重力 $\boldsymbol{P}$ 和均匀分布的风力 q。

(3) 画约束反力。因 A 处为固定铰支座，其约束反力通过铰链中心 A，但方向不能确定，用两个大小未知的正交分力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}x}$ 和 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}y}$ 表示。B 处为可动铰支座，约束反力垂直向上，

用 $\boldsymbol{F}_{NB}$表示，屋架的受力图如图 1.22(b)所示。

例 1.3 如图 1.23(a)所示，水平梁 AB 用斜杆 CD 支撑，A、C、D 所指示的 3 处均为光滑铰链连接。在均质梁重 $\boldsymbol{P}_1$ 上放置一重为 $\boldsymbol{P}_2$ 的电动机。如不计 CD 杆的自重，试分别画出杆 CD 和梁 AB(包括电动机)的受力图。

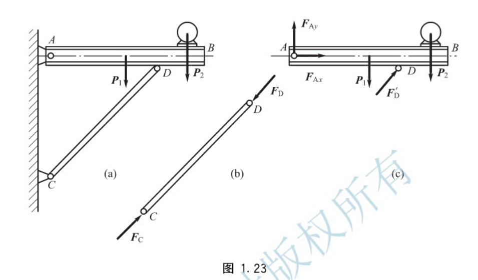


图 1.23

解：(1) 先分析斜杆 CD 的受力。由于斜杆的自重不计，因此杆只在铰链 C、D 处受到两个约束反力 $\boldsymbol{F}_C$ 和 $\boldsymbol{F}_D$。根据光滑铰链的特性，这两个约束反力必定通过铰链 C、D 的中心，方向暂不确定，考虑到杆 CD 只在 $\boldsymbol{F}_C$、$\boldsymbol{F}_D$ 两个力的作用下平衡，根据二力平衡公理，这两个力必定沿同一直线，且等值，反向。由此可确定 $\boldsymbol{F}_C$ 和 $\boldsymbol{F}_D$ 的作用线应沿铰链中心 C 与 D 的连线，即 CD 杆的轴线，由经验判断，杆 CD 受压，其受力图如图 1.23(b)所示。在一般情况下，$\boldsymbol{F}_C$ 与 $\boldsymbol{F}_D$ 的指向不能预先确定，可先任意假设受拉力或压力。若根据平衡方程求得的力为正值，说明原假设力的指向正确；若为负值，则说明实际杆受力与原来假设的指向相反。

上面的 CD 杆就是前面所述的二力构件，也称为二力杆。二力杆在工程中经常遇到，有时也把它作为一种约束。

(2) 取梁 AB(包括电动机)为研究对象。它受到 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 两个主动力的作用。梁在铰链 D 处受有二力杆 CD 给它的约束反力 $\boldsymbol{F}'_D$的作用。根据作用和反作用定律，$\boldsymbol{F}'_D=-\boldsymbol{F}_D$。梁在 A 处受固定铰支座给它的约束反力的作用，由于方向未知，可用两个大小未定的正交分力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$和 $\boldsymbol{F}_{Ay}$表示。梁 AB 的受力图如图 1.23(c)所示。

例 1.4 如图 1.24(a)所示，三铰拱桥由左、右两拱铰接形成，设各拱自重不计，左拱 AC 上作用有荷载 $\boldsymbol{F}$，试分别画出拱 AC 和 CB 的受力图。

解：(1) 先分析拱 CB 的受力。由于拱 CB 自重不计，且只在 B、C 两处受到铰链约束，因此拱 CB 为二力构件。在铰链中心 C、B 处分别受 $\boldsymbol{F}_C$、$\boldsymbol{F}_B$ 两个力的作用，且 $\boldsymbol{F}_C=-\boldsymbol{F}_B$，这两个力的方向如图 1.24(b)所示。

(2) 取拱 AC 为研究对象。由于自重不计，因此主动力只有荷载 $\boldsymbol{F}$。拱在铰链 C 处受由拱 CB 给它的约束反力 $\boldsymbol{F}'_C$的作用，根据作用和反作用定律，$\boldsymbol{F}'_C=-\boldsymbol{F}_C$。拱在 A 处受有固定铰支座给它的约束反力 $\boldsymbol{F}_A$ 的作用，由于方向未定，可用两个大小未知的正交分力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$和 $\boldsymbol{F}_{Ay}$代替。拱 AC 的受力图如图 1.24(c)所示。

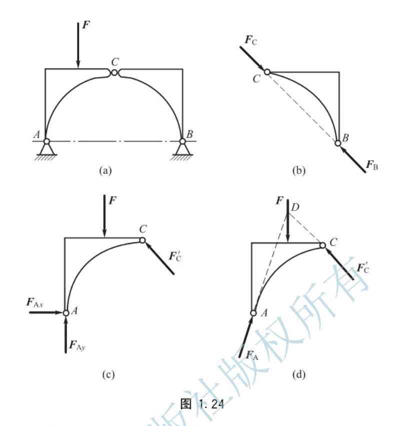


图 1.24

通过进一步分析可知，由于拱 AC 在 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'_C$ 和 $\boldsymbol{F}_A$ 这 3 个力的作用下平衡，故可根据三力平衡汇交定理，确定铰链 A 处约束反力 $\boldsymbol{F}_A$ 的方向。点 D 为力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'_C$ 作用线的交点，当拱 AC 平衡时，反力 $\boldsymbol{F}_A$ 的作用线必通过 D［图 1.24(d)］，至于 $\boldsymbol{F}_A$ 的指向，暂且假定为图 1.24 所示的方向，以后由平衡条件确定。

思考：若将左右两拱都计入自重，各部分受力图有何不同？

例 1.5 如图 1.25(a)所示，梯子的两部分 AB 和 AC 在 A 点铰接，又在 D、E 两点用水平绳连接起来。梯子放在光滑水平面上，若其自重不计，但在 AB 的中点 H 处作用一铅直荷载 $\boldsymbol{F}$。试分别画出绳子 DE 和梯子的 AB、AC 部分以及整体系统的受力图。

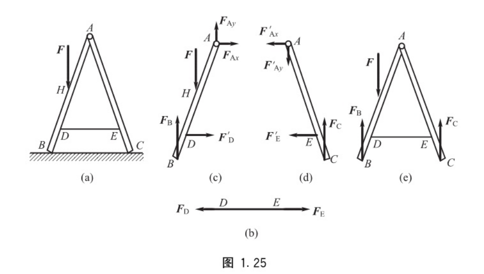


图 1.25

解：(1) 绳子 DE 的受力分析。绳子两端 D、E 分别受到梯子的拉力 $\boldsymbol{F}_D$、$\boldsymbol{F}_E$ 的作用［图 1.25(b)］。

（2）梯子 AB 部分的受力分析。它在 H 处受荷载 $\boldsymbol{F}$ 的作用，在铰链 A 处受 AC 部分给它的约束反力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Ay}$ 的作用。在 D 点受绳子对它的拉力 $\boldsymbol{F}_D'$。在点 B 受光滑地面对它的法向反力 $\boldsymbol{F}_B$ 的作用。梯子 AB 部分的受力图如图 1.25(c)所示。

（3）梯子 AC 部分的受力分析。在铰链 A 处受 AB 部分对它的作用力 $\boldsymbol{F}_{Ax}'$ 和 $\boldsymbol{F}_{Ay}'$。在点 $\boldsymbol{E}$ 受绳子对它的拉力 $\boldsymbol{F}_E'$。在 C 处受光滑地面对它的法向反力 $\boldsymbol{F}_C$。梯子 AC 部分的受力图如图 1.25(d)所示。

（4）整个系统的受力分析。当选整个系统为研究对象时，可把平衡的整个结构刚化为刚体。由于铰链 A 处所受的力互为作用力与反作用力关系，即 $\boldsymbol{F}_{Ax}=-\boldsymbol{F}_{Ax}'$，$\boldsymbol{F}_{Ay}=-\boldsymbol{F}_{Ay}'$；绳子与梯子连接点 D 和 E 所受的力也互为作用力与反作用力关系，即 $\boldsymbol{F}_D=-\boldsymbol{F}_D'$，$F_E=-\boldsymbol{F}_E'$，这些力都成对地作用在整个系统内，称为内力。内力对系统的作用效应相互抵消，因此可以除去，并不影响整个系统的平衡，故内力在受力图上不必画出。在受力图上只需画出系统以外的物体给系统的作用力，这种力称为外力。这里，荷载 $\boldsymbol{F}$ 和约束反力 F_B、F_C 都是作用于整个系统的外力。整个系统的受力图如图 1.25(e)所示。

应该指出，内力与外力的区分不是绝对的。例如，当把梯子的 AC 部分作为研究对象时，$\boldsymbol{F}_{Ax}'$、$\boldsymbol{F}_{Ay}'$ 和 $\boldsymbol{F}_E'$ 均属外力，但取整体为研究对象时，$\boldsymbol{F}_{Ax}'$、$\boldsymbol{F}_{Ay}'$ 和 $\boldsymbol{F}_E'$ 又成为内力，可见内力和外力会随着所选研究对象的不同发生变化。

综上所述，正确地画出物体的受力图，是分析解决力学问题的基础。画受力图时必须注意以下几点。

（1）必须明确研究对象。根据求解需要，可取单个物体为研究对象，也可取由几个物体组成的系统为研究对象，不同的研究对象的受力图是不同的。

（2）正确确定研究对象受力的数目。由于力是物体间相互的机械作用，因此，对于每一个力都应明确它是哪一个施力物体施加给研究对象的，决不能凭空产生，同时，也不能漏掉一个力。一般可先画已知的主动力，再画约束反力，凡是研究对象与外界接触的地方，一般都存在约束反力。

（3）正确画出约束反力。一个物体往往同时受到几个约束的作用，这时应分别根据每个约束本身的特性来确定其约束反力的方向，而不能凭主观臆测。

（4）当分析两物体间相互的作用力时，应遵循作用、反作用关系。若确定了作用力的方向，则反作用力的方向应与之相反。当画整个系统的受力图时，由于内力成对出现，组成平衡力系，因此不必画出，只需画出全部外力。

本 章 小 结

1．静力学研究作用于物体上力系的平衡，具体研究以下 3 个问题。

（1）物体的受力分析；

（2）力系的等效替换；

（3）力系的平衡条件。

2．力是物体间相互的机械作用，这种作用可使物体的机械运动状态发生变化或发生变形。力的作用效应由力的大小、方向和作用点决定，称为力的三要素。力是矢量。

3．静力学公理是力学最基本、最普通的客观规律。

公理 1　力的平行四边形法则。

公理 2　二力平衡条件。

以上两个公理阐明了作用在一个物体上最简单的力系的合成规则及其平衡条件。

公理 3　加减平衡力系原理。

这个公理是研究力系等效变换的依据。

公理 4　作用与反作用定律。

这个公理阐明了两个物体互相作用的关系。

公理 5　刚化原理。

这个公理阐明了变形体抽象成刚体模型的条件，并指出刚体平衡的必要和充分条件只是变形体平衡的必要条件。

4．约束和约束反力。

限制非自由体某些位移的周围物体称为约束，如绳索、圆柱铰链、固定铰支座、可动铰支座等。约束给非自由体施加的力称为约束反力。约束反力的方向与该约束所能阻碍的位移方向相反。画约束反力时，应分别根据每个约束本身的特性来确定其约束反力的方向。

5．物体的受力分析和受力图是研究物体平衡和运动的前提。画受力图时，首先要明确研究对象(即取分离体)。物体受的力分为主动力和约束反力。当分析多个物体组成的系统受力时，要注意分清内力与外力，内力不画，只画外力，还要注意作用力与反作用力之间的相互关系。

思　考　题

1．说明下列式子的意义和区别。

(1) $\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2$　　(2) $P_1=P_2$　　(3) 力 $\boldsymbol{P}_1$ 等效于力 $\boldsymbol{P}_2$

2．二力平衡条件与作用和反作用定律都提到二力等值、反向、共线，二者有什么区别？

3．为什么说二力平衡条件、加减平衡力系原理和力的可传性等都只能适用于刚体？

4．试区别 $\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ 和 $F_R=F_1+F_2$ 两个等式代表的意义。

5．什么是二力构件？分析二力构件受力时与构件的形状有无关系。

6．凡是两端用铰链连接的杆都是二力杆吗？凡不记自重的刚杆都是二力杆吗？

7．图 1.26～图 1.31 中各物体的受力图是否有错误？如何改正？

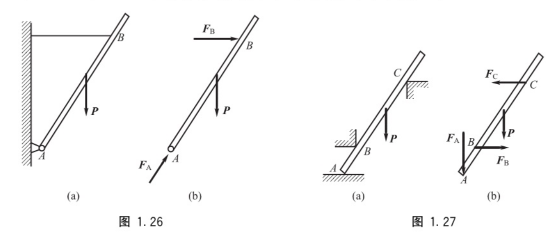


图 1.26　　图 1.27

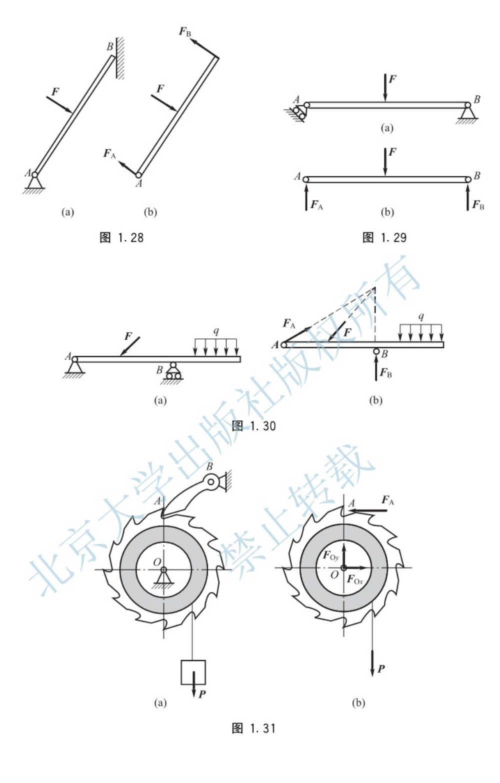


图 1.28

图 1.29

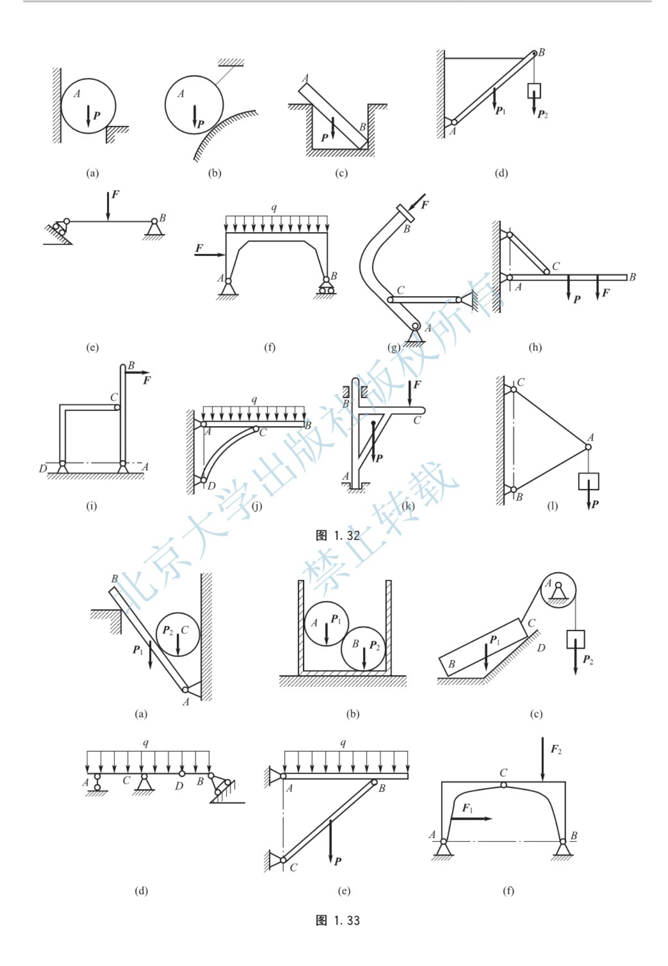
图 1.30

图 1.31

习　　题

1-1　画出图 1.32 中物体 A、ABC 或构件 AB、BC 的受力图。未画重力的物体的重量均不计，所有接触处均为光滑接触。

1-2　画出图 1.33 中每个标注字符的物体的受力图，各子图的整体受力图。未画重力的物体的重量均不计，所有接触处均为光滑接触。



A
P
(a)
A
P
(b)
A
B
P
(c)
B
A
P_1
P_2
(d)
F
B
(e)
q
F
A
B
(f)
F
B
C
A
(g)
C
A
B
P
F
(h)
B
F
C
D
A
(i)
q
A
B
C
D
(j)
F
B
C
P
A
(k)
C
A
B
P
(l)
B
P_2
C
P_1
A
(a)
A
P_1
B
P_2
(b)
A
C
P_1
D
B
P_2
(c)
q
A
C
D
B
(d)
q
A
B
P
C
(e)
F_2
C
F_1
A
B
(f)

图 1.32

图 1.33

(g)　　(h)　　(i)

(j)　　(k)　　(l)

(m)　　(n)

(o)

图 1.33(续)

1-3　试分别画出图 1.34 中整个系统以及杆 BD、AD、AB(带滑轮 C、重物 E 和一段绳索)的受力图。

1-4　构架如图 1.35 所示，试分别画出杆 HED、杆 BDC 及杆 AEC 的受力图。

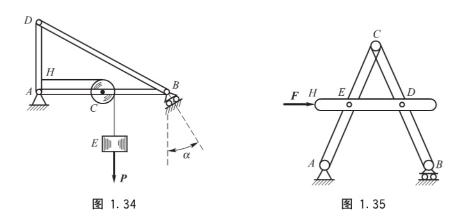


图 1.34　　图 1.35

第2章 平面汇交力系

【教学提示】

本章将研究平面力系中最简单的一种力系，平面汇交力系的合成与平衡问题。研究的方法有几何法和解析法。

【学习要求】

通过本章的学习，掌握用几何法和解析法，重点是解析法，尤其是利用平衡方程求解平面汇交力系的平衡问题要熟练掌握。

2.1 平面汇交力系在工程中的实例

工程中经常遇到平面汇交力系问题。例如，铁路大桥上钢结构中的节点就是在型钢 MN 上焊接3根角钢，受力情况如图2.1所示。$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 3个力的作用线均通过 O 点，且在同一个平面内。就构成了一个平面汇交力系。又如用吊车起吊重为 $\boldsymbol{P}$ 的钢梁时(图2.2)，钢梁受 $\boldsymbol{F}_{AT}$、$\boldsymbol{F}_{BT}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 3个力的作用，这3个力在同一平面内，且交于一点，也是平面汇交力系。所以，平面汇交力系就是各力的作用线都在同一平面内且汇交于一点的力系。

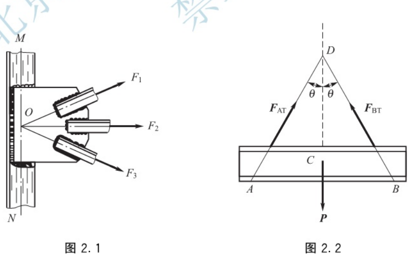


图2.1　　　　图2.2

2.2 平面汇交力系合成的几何法

设刚体上作用有平面汇交力系 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$，各力的作用线汇交于 O 点，根据力的可

传性，可将各力沿其作用线移至汇交点 O，如图 2.3(a)所示，现求其合力。

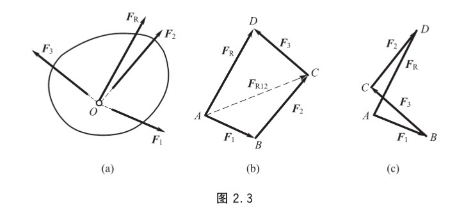


图 2.3

显然，我们只需连续用力的平行四边形法则或力的三角形法则就可以求出合力。

现在按力的三角形法则，将这些力依次相加。为此，先任选一点 A，按一定的比例尺，做矢量$\overrightarrow{AB}$平行且等于力 $\boldsymbol{F}_1$，再从 B 点做矢量$\overrightarrow{BC}$平行且等于力 $\boldsymbol{F}_2$，于是矢量$\overrightarrow{AC}$即表示力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{F}_{R12}$。仿此再从 C 点做矢量$\overrightarrow{CD}$平行且等于力 $\boldsymbol{F}_3$，于是矢量$\overrightarrow{AD}$，即表示力 $\boldsymbol{F}_{R12}$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 的合力，也就是力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 3 力的合力 $\boldsymbol{F}_R$，其大小和方向可由图中量出即可［图 2.3(b)］，而合力作用点仍在汇交点 O。

其实，作图时中间矢量$\overrightarrow{AC}$不必画出，只要把各力矢量首尾相接，画出一个开口多边形 $ABCD$，最后把第一个力 $\boldsymbol{F}_1$ 的起点 A 与最后一个力 $\boldsymbol{F}_3$ 的终点 D 相连，所得的矢量$\overrightarrow{AD}$就代表该力系合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的大小和方向，如图 2.3(b)所示。这个多边形 $ABCD$ 叫做力多边形，代表合力的矢量 AD 边叫力多边形的封闭边。这种以力多边形求合力的作图规则，称为力多边形法则。这种方法称为几何法。显然，不论汇交力的数目有多少，都可以用这种方法求其合力。

综上所述，可得结论如下：平面汇交力系合成的结果是一个合力，其大小和方向由力多边形的封闭边来表示，其作用线通过各力的汇交点。

即合力等于各分力的矢量和(或几何和)。可用矢量式表示为

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \qquad (2-1)$$

符号 $\sum_{i=1}^{n}$ 称为连加号，表示右端的量按其下标 i 由 1 到 n 逐项相加，通常符号的上下标可以省略。

用几何法求合力时，应注意以下几点。

(1) 要选择恰当的长度比例尺和力的比例尺。按长度比例尺画出轮廓图，按力的比例尺画出各力的大小，并准确地画出各力的方向。这样才能从图中准确地表示出合力的大小和方向。

(2) 作力多边形时，可任意变换力的次序，这样虽然得到的力多边形的形状不同，但合成的结果并不会改变，如图 2.3(c)所示。

(3) 力多边形中各力应首尾相接，每个力在力多边形中只允许出现一次，合力的方向是从第一个力的起点指向最后一个力的终点。

2.3 平面汇交力系平衡的几何条件

由前面知道，平面汇交力系合成的结果是一个合力。如果物体处于平衡，则合力 $\boldsymbol{F}_R$ 应等于零；反之，如果合力 $\boldsymbol{F}_R$ 等于零，则物体必然处于平衡。所以物体在平面汇交力系作用下平衡的必要和充分条件是合力 $\boldsymbol{F}_R$ 等于零。用矢量式表示为

$$\boldsymbol{F}_R=\sum \boldsymbol{F}=0 \tag{2-2}$$

在几何法中，平面汇交力系的合力 $\boldsymbol{F}_R$ 是由力多边形的封闭边来表示的。当合力 F_R 等于零时，力多边形的封闭边成为一个点，即力多边形中第一个力的起点与最后一个力的终点重合，构成了一个自行封闭的力多边形，如图 2.4(b)所示。所以平面汇交力系平衡的几何条件是：力多边形自行封闭。

利用力多边形自行封闭这个几何条件，可以求解未知的约束反力，现举例说明。

例 2.1 图 2.5(a)中钢梁的自重 $P=6\text{kN}$，$\theta=30°$，试求平衡时钢丝绳的约束反力。

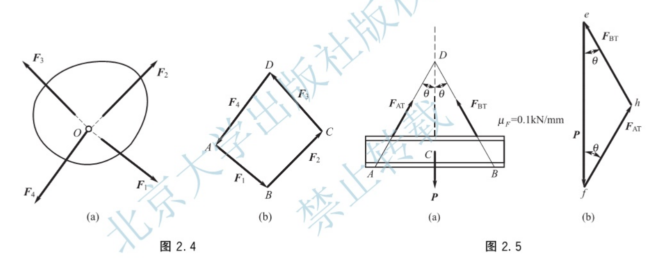


图 2.4　　　　图 2.5

解：(1) 根据题意，选钢梁为研究对象。

(2) 画受力图。

钢梁受重力 $\boldsymbol{P}$ 和钢丝绳的约束反力 $\boldsymbol{F}_{AT}$ 和 $\boldsymbol{F}_{BT}$ 作用，3 力汇交与 D 点，这是一个平面汇交力系，受力图如图 2.5(a)所示。

(3) 用几何法求约束反力。

因为钢梁在主动力 $\boldsymbol{P}$ 与约束反力 $\boldsymbol{F}_{AT}$ 和 $\boldsymbol{F}_{BT}$ 的共同作用下处于平衡，且 3 力组成了一个平面汇交力系。所以这 3 个力做出的力多边形必然封闭，于是，首先选择力比例尺 μ_F，本题选 1mm 长度代表 0.1kN，其次，任选一点 e，作矢量 $\overrightarrow{ef}$，平行且等于重力 $\boldsymbol{P}$，再从 e 和 f 两点分别作两条直线，与图 2.5(a)中的 $\boldsymbol{F}_{AT}$ 和 $\boldsymbol{F}_{BT}$ 相平行，两线交于 h 点，于是得到封闭的力三角形 efh。根据力多边形法则，按各力首尾相接的次序，标出 fh 和 he 的指向，则矢量 $\overrightarrow{fh}$ 代表力 $\boldsymbol{F}_{AT}$，矢量 $\overrightarrow{he}$ 代表力 $\boldsymbol{F}_{BT}$ [图 2.5(b)]。

按比例尺量得 $\overrightarrow{fh}$ 和 $\overrightarrow{he}$ 的长度为：$fh=34.5\text{mm}$　$he=34.5\text{mm}$

即

$$F_{AT}=34.5\text{mm}\times 0.1\text{kN/mm}=3.45\text{kN}$$

$$F_{BT}=34.5\text{mm}\times0.1\text{kN/mm}=3.45\text{kN}$$

(4) 分析。

从力三角形可以看到，在重力 $\boldsymbol{P}$ 不变的情况下，角 θ 越大，钢丝绳所受的拉力也随之增大。因此，起吊重物时应尽量将钢丝绳放长一些，使夹角 2θ 较小些，这样钢丝绳才不易被拉断。

例 2.2 简易绞车如图 2.6(a)所示，A、B 和 C 为铰链连接，钢丝绳绕过滑轮 A 将 $P=20\text{kN}$ 的重物吊起，不记摩擦及杆件 AB、AC 的质量，试求两杆 AB、AC 所受的力。

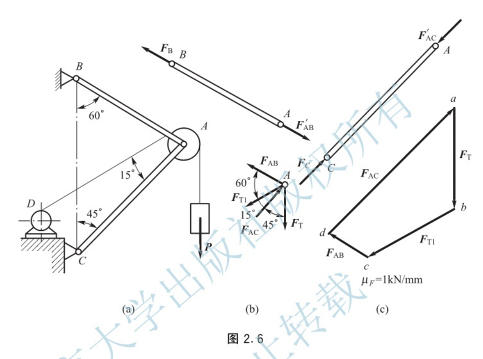


图 2.6

解：(1) 选滑轮 A 为研究对象 [图 2.6(b)]。

(2) 画受力图。

重物通过钢丝绳给滑轮一个向下的力 $\boldsymbol{F}_T$；绞车 D 通过钢丝绳给滑轮一个向左下方的力 $\boldsymbol{F}_{T1}$。因为不计摩擦，所以，$F_T=F_{T1}=P=20\text{kN}$，又因为杆 AB 是二力杆，所以力 $\boldsymbol{F}_{AB}$ 的方向沿杆 AB 的轴线。同理，杆 AC 也是如此。它给滑轮的约束反力也是沿着 AC 杆的轴线方向，用 $\boldsymbol{F}_{AC}$ 表示，至于指向假设如图 2.6(b)所示，这 4 个力组成了一个平面汇交力系。

(3) 用几何法作力多边形，求未知量。

选力比例尺 $\mu_F=1\text{kN/mm}$，其次，任选一点 a，作 $\overrightarrow{ab}=F_T$，$\overrightarrow{bc}=F_{T1}$，再从 a 和 c 分别作直线平行于力 $\boldsymbol{F}_{AC}$ 和 $\boldsymbol{F}_{AB}$，相交于 d，于是得到封闭的力多边形 $abcd$。根据力多边形法则，按各力首尾相接的次序，标出 cd 和 da 的指向，则矢量 $\overrightarrow{cd}$ 和 $\overrightarrow{da}$ 分别代表力 $\boldsymbol{F}_{AB}$ 和 $\boldsymbol{F}_{AC}$。按比例尺量得：

$$F_{AB}=cd=9.3\text{kN}\quad F_{AC}=da=35.9\text{kN}$$

杆 AB 和 AC 所受的力分别与力 $\boldsymbol{F}_{AB}$ 和 $\boldsymbol{F}_{AC}$ 等值反向 [因为(b)图所画之力是杆给轮的力，所以轮给杆的力应与之相反]。可见杆 AB 受拉力，杆 AC 受压力。

例 2.3 钢架如图 2.7(a)所示，在 B 点受一水平力作用，设 $F=20\text{kN}$，钢架的质量略去不计，求 A、D 处的约束反力。

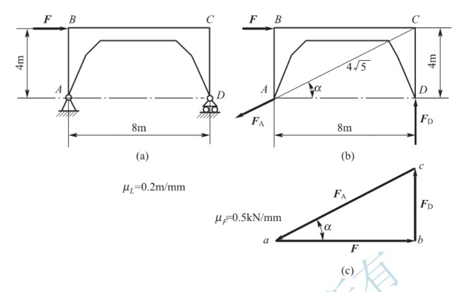


图 2.7

解：(1) 选钢架为研究对象［图 2.7(a)］，选择长度比例尺 $\mu_L=0.2\text{m/mm}$，画出钢架的轮廓图形。

(2) 画受力图。

钢架受水平主动力 $\boldsymbol{F}$ 作用，D 点为可动铰支座，故约束反力 $\boldsymbol{F}_D$ 通过销钉中心 D，垂直于支承面，方向假设朝上。A 点为固定铰支座，约束反力的方位本来待定。但由于钢架在 3 个力作用下处于平衡，而力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}_D$ 交于 C，所以力 $\boldsymbol{F}_A$ 沿 AC 连线的方向。指向可假设，受力图如图 2.7(b)所示。

(3) 用几何法作力多边形，求未知量。

选择力比例尺 $\mu_F=0.5\text{kN/mm}$，作封闭的力三角形。如图 2.7(c)所示。量得

$$F_A=22.4\text{kN},\quad F_D=10\text{kN}$$

两反力的指向由力三角形闭合的条件而确定。可见图中假设正确。或根据三角关系计算

$$F_A=\frac{F}{\cos\alpha}=22.4\text{kN},\quad F_D=F_A\sin\alpha=10\text{kN}$$

(4) 分析讨论。

本例与 1、2 例不同，它充分体现了选择长度比例尺 μ_L 与力的比例尺 μ_F 同等重要，如果长度比例尺选的不好，不能准确的画出钢架的轮廓图形，也就无法确定 F_A 的方位。

通过以上例题，可以看出，几何法解题具有直观、简便、一目了然的优点。

2.4 平面汇交力系合成的解析法

求解平面汇交力系问题，除了用前面所述的几何法以外，最常用的还是解析法，解析法是以力在坐标轴上的投影为基础的，为此，先介绍力在坐标轴上的投影。

1. 力在坐标轴上的投影

设力 $\boldsymbol{F}$ 在 Oxy 平面内(图 2.8)。从力 $\boldsymbol{F}$ 的起点 A 和终点 B 分别向 Ox 轴作垂线 Aa 和

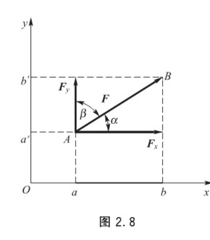


图 2.8

Bb，两垂线在 Ox 轴上截得的线段 ab 称为力 F 在 x 轴上的投影，同理，线段 $a'b'$ 称为力在 y 轴上的投影。通常用 F_x 表示力在 x 轴上的投影，用 F_y 表示力在 y 轴上的投影。

如果知道了力 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴和 y 轴的正向间的夹角 α 和 β，由图 2.8 可知

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F\cos\alpha \\ F_y &= F\cos\beta \end{aligned}\right\} \tag{2-3}$$

力在坐标轴上的投影是代数量。

反之，如已知力 $\boldsymbol{F}$ 在 x 轴和 y 轴上的投影 F_x 和 F_y，由几何关系可求出力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向余弦为

$$\left.\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2+F_y^2} \\ \cos\alpha = F_x/F&,\ \cos\beta = F_y/F \end{aligned}\right\} \tag{2-4}$$

为了便于计算，通常采用力 $\boldsymbol{F}$ 与坐标轴所夹的锐角计算余弦，并且规定：当力的投影，从始端 a 到末端 b 的指向与坐标轴的正向一致时，投影值为正，反之为负。（注意图 2.8 中的 $\boldsymbol{F}_x$ 与线段 ab 之间的关系）

2. 合力投影定理

图 2.9 为由平面汇交力系 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 所组成的力多边形 $ABCD$，$\overrightarrow{AD}$是封闭边，即合力 $\boldsymbol{F}_R$。任选坐标系 Oxy，将合力 $\boldsymbol{F}_R$ 和各分力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 分别向 x 轴上投影，得

$$F_{Rx} = ad$$

$$F_{1x} = ab,\quad F_{2x} = bc,\quad F_{3x} = -cd$$

由图 2.9 可见　　$ad = ab + bc - cd$

故得，　　$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$

同理可得　　$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$

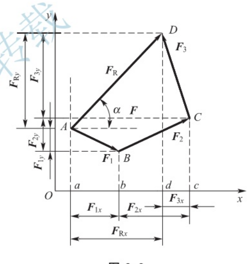


图 2.9

若将上述合力投影与各分力投影的关系式推广到 n 个力组成的平面汇交力系中，可得到

$$\left.\begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum F_x \\ F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum F_y \end{aligned}\right\} \tag{2-5}$$

合力在任意轴上的投影，等于各分力在同一轴上投影的代数和，这种关系称为合力投影定理。

3. 合成的解析法

算出合力的投影 F_{Rx} 和 F_{Ry} 后，就可按(2-4)求出合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的大小和方向余弦为

$$\left.\begin{aligned} F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2} \\ \cos\alpha &= \sum F_x/F_R,\ \cos\beta = \sum F_y/F_R \end{aligned}\right\} \tag{2-6}$$

式中：α 和 β 分别表示合力 $\boldsymbol{F}_R$ 与 x 轴和 y 轴正向间的夹角。

运用式(2-6)计算合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的大小和方向，这种方法称为平面汇交力系合成的解析法。

例 2.4　如图 2.10 所示，作用在吊环上的 4 个力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 和 $\boldsymbol{F}_4$ 构成了平面汇交力系，已知各力的大小和方向为 $F_1=360\text{N}$，$\alpha_1=60°$；$F_2=550\text{N}$，$\alpha_2=0°$；$F_3=380\text{N}$，

$\alpha_3=30°$；$F_4=300\text{N}$，$\alpha_4=70°$。试用解析法求合力的大小和方向。

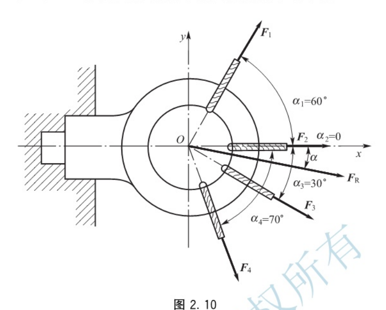


图 2.10

解：(1) 选取坐标系 Oxy，如图 2.10 所示。

(2) 将各个力分别向坐标轴投影如下

在 x 轴上：$F_{1x}=F_1\cos\alpha_1$　$F_{2x}=F_2\cos\alpha_2$　$F_{3x}=F_3\cos\alpha_3$　$F_{4x}=F_4\cos\alpha_4$

在 y 轴上：$F_{1y}=F_1\sin\alpha_1$　$F_{2y}=F_2\sin\alpha_2$　$F_{3y}=-F_3\sin\alpha_3$　$F_{4y}=-F_4\sin\alpha_4$

由式(2-5)得

$$\begin{aligned}F_{Rx}&=\sum F_x=F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}+F_{4x}\\&=F_1\cos60°+F_2\cos0°+F_3\cos30°+F_4\cos70°\\&=306\text{N}\times0.5+550\text{N}\times1+380\text{N}\times0.866+300\text{N}\times0.342=1162\text{N}\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}F_{Ry}&=\sum F_y=F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}+F_{4y}\\&=F_1\sin\alpha_1+F_2\sin\alpha_2-F_3\sin\alpha_3-F_4\sin\alpha_4=-160\text{N}\end{aligned}$$

(3) 根据式(2-6)可得

$$F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2}=1173\text{N}$$

$$\cos\alpha=\frac{1162}{1173}=0.9906$$

$$\cos\beta=\frac{-160}{1173}=-0.1364$$

$$\alpha=-7°48'$$

合力 $\boldsymbol{F}_R$ 指向，如图 2.10 所示。

2.5 平面汇交力系的平衡方程及其应用

从前面知道，平面汇交力系的平衡条件是合力 $\boldsymbol{F}_R$ 为零，由式(2-6)则有

$$F_R=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2}=0$$

所以且只需

$$\left.\begin{aligned}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\end{aligned}\right\} \tag{2-7}$$

即平面汇交力系平衡的解析条件是力系中所有的力在 x 轴和 y 轴上投影的代数和分别等于零。式(2-7)称为平面汇交力系的平衡方程，运用这两个方程，可以求解两个未知量。用解析法求解平衡问题时，未知力的指向可先假设，如果计算结果为正值，就表示所假设力的指向与实际指向相同，如果为负值，则表示所假设力的指向与实际指向相反。

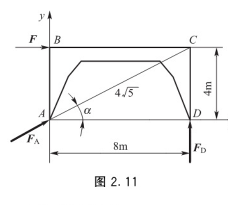


图 2.11

例 2.5 用解析法求解例 2.3。

解：(1) 选刚架为研究对象。

(2) 画受力图。

约束反力 $\boldsymbol{F}_A$ 的指向假设如图 2.11 所示。

(3) 选坐标系如图所示，列平衡方程如下

$$\sum F_x=0,\quad F+F_A\cdot\frac{8}{4\sqrt{5}}=0 \tag{a}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_D+F_A\cdot\frac{4}{4\sqrt{5}}=0 \tag{b}$$

(4) 求未知量。

由式(a)得

$$F_A=-\frac{\sqrt{5}}{2}F=-22.4\text{kN}$$

$\boldsymbol{F}_A$ 得负值，表示图中假设的方向与实际指向相反。

由式(b)得

$$F_D=-F_A\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$$

将 $\boldsymbol{F}_A$ 连同“—”号一起代入得

$$F_D=\frac{F}{2}=10\text{kN}$$

例 2.6 简易榨油机如图 2.12(a)所示，气缸中的活塞给销钉 A 的水平推力为 F，A、B、C 3 点为铰链连接，托板与连杆的自重不计，机构平衡。试求当连杆 AB、AC 与铅垂线成 α 角时，托板给被压物体的力。

解：这是一个构件系统的平衡问题，如果直接取托板或被压物体为研究对象，因它们上面没有已知力，应该从有已知力的地方开始算起，所以，应选取销钉 A 为研究对象，算出连杆所受的力，再取托板为研究对象，求出托板给被压物体的力。

(1) 选销钉 A 为研究对象，其受力图如图 2.12(b)所示。活塞给销钉 A 的力 F 水平向左，连杆 AB、AC 均为二力杆，所以，$\boldsymbol{F}_{AB}$ 和 $\boldsymbol{F}_{AC}$ 分别沿它们的轴线，指向先假设如图所示。

取坐标系如图所示，列平衡方程

$$\sum F_x=0;\quad F_{AB}\sin\alpha+F_{AC}\sin\alpha-F=0 \tag{a}$$

$$\sum F_y=0;\quad -F_{AB}\cos\alpha+F_{AC}\cos\alpha=0 \tag{b}$$

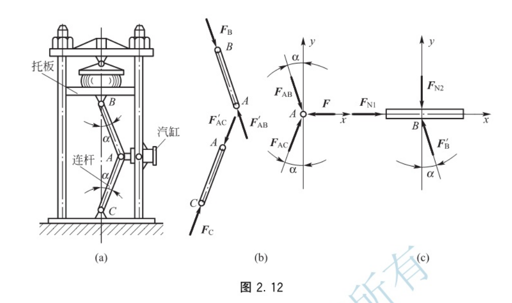


图 2.12

由式(b)得

$$F_{AB}=F_{AC}$$

代入式(a)得

$$F_{AB}=F_{AC}=\frac{F}{2\sin\alpha} \tag{c}$$

由于 $\alpha<90°$，所以 $\boldsymbol{F}_{AB}$、$\boldsymbol{F}_{AC}$ 为正值，表示图中的假设指向与实际指向相同。连杆 AB、AC 所受的力分别与力 $\boldsymbol{F}_{AB}$ 和 $\boldsymbol{F}_{AC}$ 等值反向，可见两个连杆都受压力，如图 2.12(b)所示。

(2) 再选托板为研究对象，其受力图如图 2.12(c)所示。被压物体给托板的力 $\boldsymbol{F}_{N2}$ 铅直向下，连杆 AB 给托板的力 $\boldsymbol{F}'_B$ 是力 $\boldsymbol{F}_B$ 的反作用力，立柱给托板的反力 $\boldsymbol{F}_{N1}$ 水平向右。取坐标系如图所示，列平衡方程。这里只需列沿 y 轴方向的平衡方程即可

$$\sum F_y=0;\quad F'_B\cos\alpha-F_{N2}=0 \tag{d}$$

由式(d)得

$$F_{N2}=F'_B\cos\alpha \tag{e}$$

因 $F'_B=F_{AB}$，把式(c)代入式(e)，则

$$F_{N2}=\frac{F}{2\sin\alpha}\cdot\cos\alpha=\frac{F}{2}\cot\alpha$$

托板给被压物体的力应与 $\boldsymbol{F}_{N2}$ 等值反向。

设 $\alpha=5°$，活塞的水平推力 $F=1\text{kN}$，代入上式可得

$$F_{N2}=\frac{F}{2}\cot\alpha=5.72\text{kN}$$

本 章 小 结

本章主要内容是运用几何法和解析法研究平面汇交力系的合成与平衡问题。重点是解析法，应熟练掌握。

1. 平面汇交力系只能合成一个合力 $\boldsymbol{F}_R$，合力等于所有分力的矢量和，即 $\boldsymbol{F}_R=\sum\boldsymbol{F}_i$

(1) 在几何法中，力多边形的封闭边表示合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的大小和方向。

(2) 在解析法中，合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的大小和方向按式(2-6)计算。

2. 平面汇交力系平衡的必要与充分条件是合力 $\boldsymbol{F}_R$ 等于零。

(1) 在几何法中，表现为力的多边形自行封闭。

(2) 在解析法中，力系中所有的力在任意两个相互垂直坐标轴上投影的代数和分别等于零即

$$\sum F_x=0;\quad \sum F_y=0$$

用两个独立的平衡方程，可求出两个未知量。

思 考 题

1. 试指出图 2.13 所示各力多边形中，哪个是自行封闭的？哪个不是自行封闭的？如果不是自行封闭，哪个力是合力？哪些力是分力？

2. $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 及 $\boldsymbol{F}_4$ 是作用在刚体上的平面汇交力系，其力矢之间有如图 2.14 所示的关系，合力为 $\boldsymbol{F}_R$。以下情况中哪几种是错误的？

A. $\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{F}_4$　　B. $\boldsymbol{F}_R=2\boldsymbol{F}_4$

C. $\boldsymbol{F}_R=-\boldsymbol{F}_4$　　D. $\boldsymbol{F}_R=-2\boldsymbol{F}_4$

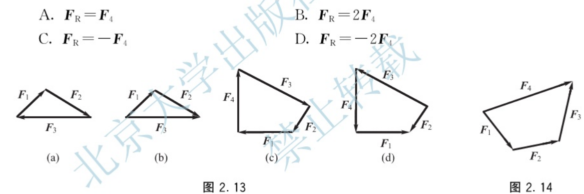


图 2.13　　图 2.14

3. 试写出图 2.15 所示各力在 x 轴和 y 轴上投影的计算式。

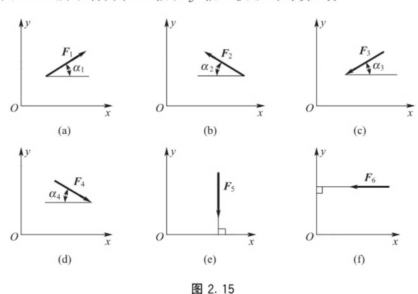


图 2.15

4. 试分别计算图2.16中力 $\boldsymbol{F}$ 在 x、y' 方向或 x、y 方向上的分力和投影，并对比其区别。

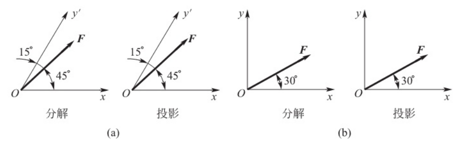


图 2.16

5. 如果力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 在 x 轴上投影相等，那么，这两个力是否一定相同？为什么？

6. “作用在刚体上同一平面内某一点的3个力，必使刚体平衡”是否正确？

7. 平面汇交力系具有几个独立平衡方程？

习　　题

2-1　铆接钢板在孔 A、B 和 C 处受三个力作用，如图2.17所示。已知 $F_1=100\text{N}$，沿铅垂方向；$F_2=50\text{N}$，沿 AB 方向；$F_3=50\text{N}$，沿水平方向。求此力系的合力。

2-2　桁架的连接点如图2.18所示，如沿 OA、OB 和 OC 方向之力分别为 $F_1=F_3=1.414\text{kN}$，$F_2=1\text{kN}$。试求钢板 $mnpqrs$ 传给杆 MN 的力。

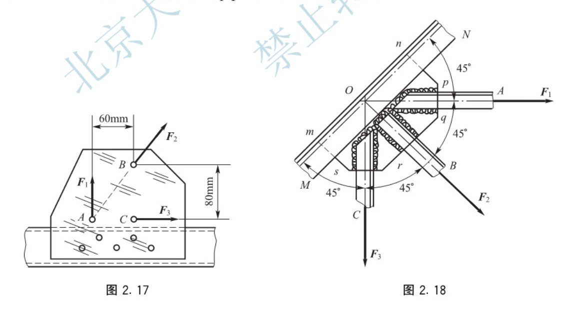


图 2.17　　图 2.18

2-3　支架如图2.19所示，由杆 AB 与 AC 组成，A、B 与 C 均为铰链，在销钉 A 上悬挂重量为 W 的重物。试求图示4种情况下，杆 AB 与杆 AC 所受的力。

2-4　图2.20所示梁在 A 端为固定铰支座，B 端为可动铰支座，$F=20\text{kN}$。试求图示两种情形下 A 和 B 处的约束反力。

2-5　图2.21所示电动机重 $P=5\text{kN}$，放在水平梁 AC 的中间，A 和 B 为固定铰链，

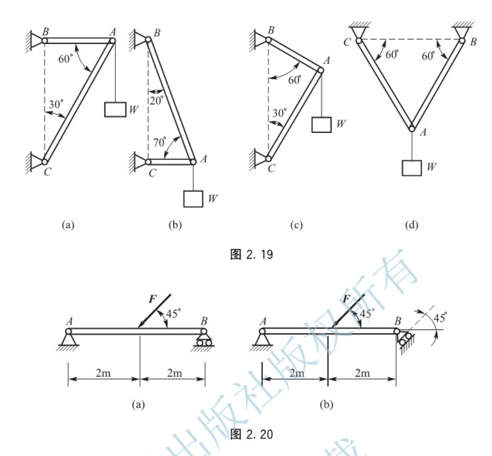


图 2.19

图 2.20

C 为中间铰链。试求 A 点反力及杆 BC 所受的力。

2－6　图示 2.22 圆柱体 A 重 P，在其中心系着两绳 AB 和 AC，并分别经过滑轮 B 和 C，两端分别挂重为 P_1 和 P_2 的物体，设 $P_2>P_1$。试求平衡时绳 AC 和水平线所构成的角 α 及 D 处约束反力。

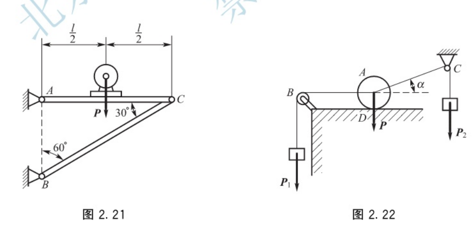


图 2.21　　　　图 2.22

2－7　图 2.23 所示三铰拱架由 AC 和 BC 两部分组成，A、B 均为固定铰链，C 为中间铰。试求铰链 A、B 的约束反力。

2－8　图 2.24 所示起重机 BAC，A 为滑轮，B 与 C 均为铰链，吊起重物 $P=20\text{kN}$，几何尺寸如图 2.24 所示。试求杆 AB 和 AC 所受的力。

2－9　图 2.25 所示一拔桩装置。在木桩的 A 点上系一绳，将绳的另一端固定在 C 点，又在绳的 B 点系另一绳，此绳的另一端固定在 E 点。然后在绳的 D 点挂一重物重 $P=$

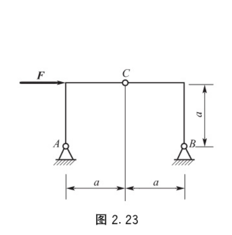


图 2.23

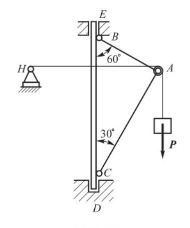


图 2.24

300N，此时 BD 段水平，AB 段铅直，已知 $\alpha=0.1\text{rad}$(当 α 很小时 $\tan\alpha\approx\alpha$)。试求 AB 绳作用于桩上的力 F_T。

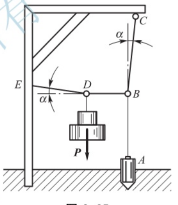


图 2.25

2-10 图 2.26 示液压式夹紧机构，D 为固定铰，B、C、E 为中间铰。已知力 F 及几何尺寸，试求平衡时工件 H 所受的压紧力。

2-11 气动夹具简图如图 2.27 所示，汽缸固定在机架上，已知活塞受到向下的总压力 $F=7.5\text{kN}$。四杆 AB、BC、AD、DE 均为铰链连接，B、D 为两个滚轮。不计杆和轮的质量及摩擦，$\alpha=150°$，$\beta=10°$，机构平衡。试求工件所承受的压力。

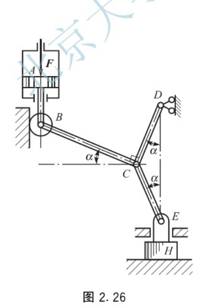


图 2.26

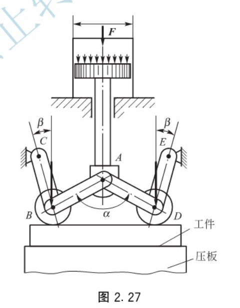


图 2.27

第3章 平面力偶系

【教学提示】

本章主要研究力矩和力偶的概念、力偶的性质、平面力偶系的合成与平衡。

【学习要求】

通过本章的学习，记住力矩和力偶的概念及性质。重点是平面力偶系的合成与平衡问题。掌握利用平衡方程求解平面力偶系的平衡问题。

3.1 力对点之矩——力矩

实际告诉我们：用扳手转动螺母时(图 3.1)，作用在扳手上的力 $\boldsymbol{F}$ 有使扳手绕 O 点转动的效应的大小，不仅取决于力 $\boldsymbol{F}$ 的大小，还取决于力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线到 O 点的垂直距离 h。因此，在力学上用乘积 $F\cdot h$ 作为度量力 $\boldsymbol{F}$ 使物体绕 O 点转动效应的物理量。这个量称为力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点之矩，简称力矩。以符号 $M_O(\boldsymbol{F})$表示，即

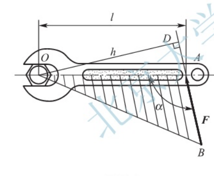


图 3.1

$$M_O(\boldsymbol{F})=\pm Fh \tag{3-1}$$

O 点称为矩心，O 点到力 $\boldsymbol{F}$ 作用线的垂直距离 h，称为力臂。通常规定：力使物体绕矩心作逆时针方向转动时，力矩取正号；作顺时针方向转动时，取负号。根据以上情况，平面内力对点之矩，只取决于力矩的大小及转向，因此平面内力对点之矩是一个代数量。

此外，由图 3.1 知，力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点之矩的大小还可用三角形 OAB 面积的 2 倍来表示，即

$$M_O(\boldsymbol{F})=\pm 2A_{\triangle OAB} \tag{3-2}$$

力矩的单位是 N·m 或 kN·m。

综上所述可知

(1) 力矩是用来度量物体转动效应的，它不仅取决于力的大小，同时还与矩心的位置有关。

(2) 力 $\boldsymbol{F}$ 对任一点之矩，不会因该力沿其作用线移动而改变，因为此时力和力臂的大小均未改变。

(3) 力的作用线通过矩心时，力矩等于零。

(4) 互成平衡的两个力对同一点之矩的代数和等于零。

例 3.1 图 3.1 中扳手所受的力 $F=200\text{kN}$，$l=0.4\text{m}$，$\alpha=120°$，试求力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点之矩。

解： 根据式(3-1)，有

$$M_O(\boldsymbol{F})=F\cdot h=Fl\sin\alpha=200\times10^3\,\mathrm{N}\times0.4\mathrm{m}\times0.866=69.2\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

正号表示扳手绕 O 点作逆时针方向转动。

例 3.2 图 3.2(a)中两齿轮啮合传动，已知大齿轮的节圆半径为 r_2、直径为 D_2，小齿轮作用在大齿轮上的压力为 $\boldsymbol{F}$，如图 3.2(b)所示，压力角为 α_0。试求力 $\boldsymbol{F}$ 对大齿轮转动中心 O_2 点之矩。

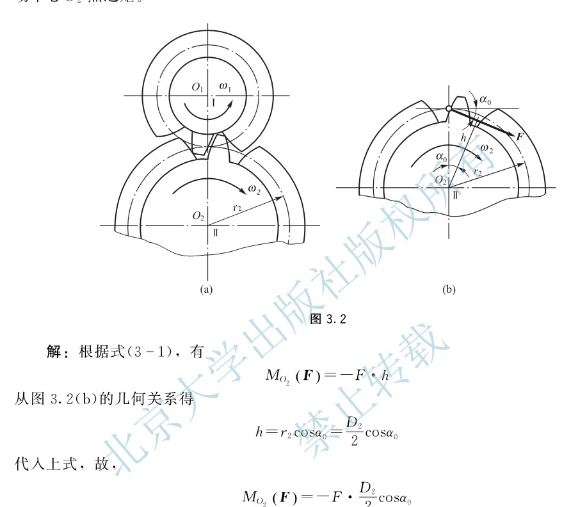


图 3.2

解：根据式(3-1)，有

$$M_{O_2}(\boldsymbol{F})=-F\cdot h$$

从图 3.2(b)的几何关系得

$$h=r_2\cos\alpha_0=\frac{D_2}{2}\cos\alpha_0$$

代入上式，故，

$$M_{O_2}(\boldsymbol{F})=-F\cdot\frac{D_2}{2}\cos\alpha_0$$

负号表示力 $\boldsymbol{F}$ 使大齿轮绕 O_2 点作顺时针方向转动。(上式还有其他层面含义，请同学们思考)

3.2 力偶与力偶矩

在日常生活中，经常看到物体同时受到大小相等、方向相反、作用线互相平行的两个力的作用。例如，拧水龙头时人手作用在开关上的两个力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$(图 3.3)，用钥匙开锁等等也是如此。在力学上我们把大小相等、方向相反、作用线互相平行的两个力叫做力偶，并记为($\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}'$)力偶中两力所在的平面叫力偶作用面，两力作用线间的垂直距离叫力偶臂，以 d 表示(图 3.4)。

物体受力偶作用的实例还很多，如用丝锥攻丝时、汽车司机、旋转方向盘时，他们加在丝锥上的力和方向盘上的力实际上都是力偶，如图 3.5 所示。

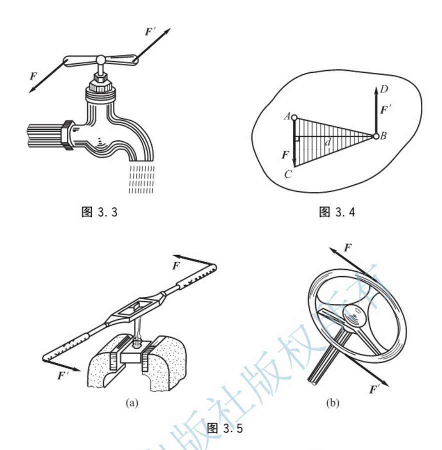


图 3.3　　图 3.4

图 3.5

力偶对物体的作用效应是怎样的呢？由于力偶中的两个力大小相等、方向相反、作用线平行，所以它们在任何坐标轴上投影之和等于零(图 3.6)。

力偶没有合力，也不能用一个力来代替。既然没有合力，它就不会对物体产生移动效应。但力偶本身又不能平衡，因不符合二力平衡公理，所以力偶只能使物体产生转动效应。如何来度量力偶对物体的转动效应呢？显然可用力偶中两个力对矩心的力矩之和来度量，如图 3.7 所示。

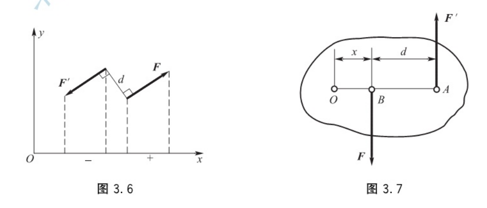


图 3.6　　图 3.7

在力偶平面内任取一点 O 为矩心，设 O 点与力 F 作用线的距离为 x，则力偶的两个力对 O 点之矩的和为

$$M_O(\boldsymbol{F})+M_O(\boldsymbol{F}')=-Fx+F'(x+d)=-Fx+F'x+F'd=F'd=Fd$$

由此可见，力偶对任一点 O 的力矩只与力 $\boldsymbol{F}$ 和力偶臂 d 的大小有关，而与矩心的位置无关。即力偶对物体的转动效应只取决于力偶中力的大小和二力之间的垂直距离。因此，在力学上以乘积 $F \cdot d$ 作为量度力偶对物体的转动效应的物理量，这个量称为力偶

矩，以符号 M 表示，即

$$M=\pm Fd \tag{3-3}$$

上式中的正负号表示力偶的转动方向，即逆时针方向转动时为正；顺时针方向转动时为负(图 3.8)。由此可见，在平面问题中，力偶矩可用代数量表示。

(a) (b)

图 3.8

从图 3.4 看出：力偶矩也可用三角形面积的 2 倍来表示，即

$$M=\pm 2A_{\triangle ABC} \tag{3-4}$$

与力矩一样，力偶矩的单位是 N·m 或 kN·m。

综上所述可知，力偶对物体的作用效应，取决于下列 3 个因素：①力偶矩的大小；②力偶的转向；③力偶的作用面。以上称为力偶的三要素。

3.3 力偶的等效性

力偶和力一样，是两个最基本的力学元素。力偶没有合力，本身又不能平衡。即力偶不能与一个力等效，只能与另一个力偶等效。而力偶对物体的转动效应又完全取决于力偶矩，且与矩心的位置无关。所以，在同一平面内的两个力偶，只要它们的力偶矩大小相等、转向相同，则两力偶必等效，这就是平面力偶的等效性。

上述结论，可直接由经验证实。如图 3.9(a)中作用在方向盘上的力偶($\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_1'$)或($\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_2'$)，虽然它们的作用位置不同，但如果它们的力偶矩大小相等、转向相同，则对方向盘的转动效应就相同。

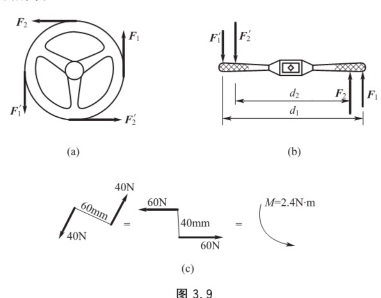


图 3.9

又如作用在丝锥扳手上的力偶($\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_1'$)或($\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_2'$)［图 3.9(b)］，虽然 $F_1 \neq F_2$，$d_1 \neq d_2$，但如果两个力偶矩相等，即 $F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$，则它们对丝锥的转动效应就相同。

力偶的等效性可形象地表示为图 3.9(c)所示。

综上所述，可以得出下列两个重要推论。

(1) 力偶可以在作用面内任意转移，而不影响它对物体的作用效应。

(2) 在保持力偶矩的大小和转向不变的条件下，可任意改变力和力偶臂的大小，而不影响它对物体的作用效应。

应当指出，以上的结论，不适用于变形效应的研究。例如，图 3.10(a)中的力偶($\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_1'$)，如变换成为力偶矩相等的力偶($\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_2'$)［图 3.10(b)］，尽管对梁的平衡没有影响，但对梁的变形效应却不一样。

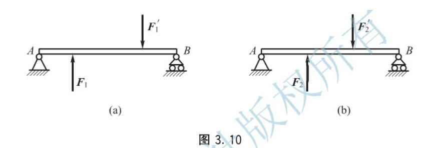


图 3.10

3.4 平面力偶系的合成与平衡

设在同一平面内有两个力偶($\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}'_1$)和($\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}'_2$)，它们的力偶臂各为 d_1 和 d_2 (图 3.11(a))，其力偶矩分别为 M_1 和 M_2。求其合成结果。

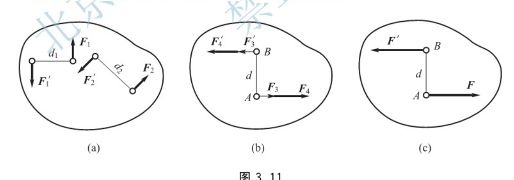


图 3.11

在力偶的作用面内任取一线段 $AB=d$，在不改变力偶矩的条件下将各力偶的臂都化为 d，于是得到与原力偶等效的两个力偶($\boldsymbol{F}_3$，$\boldsymbol{F}'_3$)和($\boldsymbol{F}_4$，$\boldsymbol{F}'_4$)，$\boldsymbol{F}_3$ 和 $\boldsymbol{F}_4$ 的大小可由下列等式算出

$$M_1 = F_3 \cdot d, \quad M_2 = F_4 \cdot d$$

然后转移各力偶使它们的臂都与 AB 重合，如图 3.11(b)所示。再将作用于 A 点的两个力合成为一个合力 $\boldsymbol{F}$，其大小为

$$F = F_3 + F_4$$

同样，再将 B 点的两个力也合成为一个合力 F'，其大小为

$$F' = F_3' + F_4'$$

显然 **F** 与 **F**′大小相等、方向相反，且不在同一直线上。它们组成了一个力偶(**F**，**F**′)[图 3.11(c)]，这就是两个已知力偶的合力偶，其力偶矩为

$$M = Fd = (F_3 + F_4)d = F_3 d + F_4 d = M_1 + M_2$$

推广：若作用在同一平面内有 n 个力偶，则其合力偶矩应为

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n$$

或

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i \tag{3-5}$$

由上可知，平面力偶系合成的结果是一个合力偶，合力偶矩等于各已知力偶矩的代数和。

平面力偶系合成的结果是一个合力偶，如果这个平面力偶系平衡，则合力偶矩必须等于零，即

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0 \tag{3-6}$$

反之，如果合力偶矩为零，则平面力偶系必然平衡。

由此可知，平面力偶系平衡的必要和充分条件是：力偶系中各力偶矩的代数和等于零。式(3-6)是解平面力偶系平衡问题的基本方程，运用这个平衡方程，可以求出一个未知量。

例 3.3 要在汽缸盖上钻 4 个相同的孔(图 3.12)，现估计钻每个孔的切削力偶矩 $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_O = 15\text{N}\cdot\text{m}$，转向如图所示，当用多轴钻床同时钻这 4 个孔时，问工件受到的总切削力偶矩是多大？

解： 作用在汽缸盖上的力偶有 4 个，各力偶矩的大小相等，转向相同，又在同一平面内，因此这 4 个力偶的合力偶矩为

$$M = \sum M_i = -M_1 - M_2 - M_3 - M_4 = -4M_O = -4\times 15\text{N}\cdot\text{m} = -60\text{N}\cdot\text{m}$$

负号表示合力偶矩顺时针方向转动。知道总切削力偶矩之后，就可考虑夹紧措施，设计夹具。

例 3.4 如图 3.13 所示，电动机轴通过联轴器与工作轴相连接，联轴器上 4 个螺栓 A、B、C、D 的孔心均匀地分布在同一圆周上，此圆的直径 $AC = BD = 150\text{mm}$，电动机轴传给联轴器的力偶矩 $M_O = 2.5\text{kN}\cdot\text{m}$，试求每个螺栓所受的力为多少？

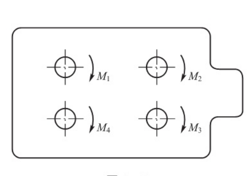


图 3.12

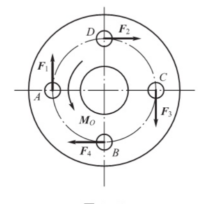


图 3.13

解：(1) 取联轴器为研究对象。

作用于联轴器上的力有电动机传给联轴器的力偶、每个螺栓的反力，受力图如图所示。假设 4 个螺栓的受力均匀，即 $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F$，则组成两个力偶并与电动机传给

联轴器的力偶平衡。

(2) 列平面力偶系平衡方程　由$\sum M=0$，有

$$M_O-F\times AC-F\times BD=0$$

而

$$AC=BD$$

故

$$F=\frac{M_O}{2AC}=\frac{2.5\mathrm{kN\cdot m}}{2\times 0.15\mathrm{m}}=8.33\mathrm{kN}$$

例 3.5　在框架杆 CD 上作用有一力偶，其力偶矩 M_O 大小为 40N·m，转向如图 3.14(a) 所示。A 为固定铰链，C、D 和 E 均为中间铰链，B 为光滑面。不计各杆质量。图中长度单位为 mm。试求平衡时，A、B、C 和 D 处的约束反力。

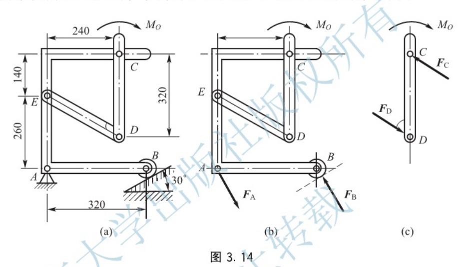


图 3.14

解： 这是物体系统的平衡问题，应先选取整个系统为研究对象，求出 A 和 B 处的反力，再选杆 CD 为研究对象，求出 C 和 D 处的反力。

(1) 先选取整个系统为研究对象，画受力图。

它受有力偶、光滑面 B 处约束反力 $\boldsymbol{F}_B$ 和铰链 A 的反力 $\boldsymbol{F}_A$ 的作用(图 3.14(b))，按照平面力偶系平衡条件，$\boldsymbol{F}_A$ 必定与 $\boldsymbol{F}_B$ 构成一力偶，故 $\boldsymbol{F}_A$ 与 $\boldsymbol{F}_B$ 平行且反向。

列出平面力偶系平衡方程式

$$\sum M=0 \quad -M_O+F_A\cdot AB\cos 30°=0 \tag{a}$$

得

$$F_A=\frac{M_O}{AB\cos 30°}=\frac{40\mathrm{N\cdot m}}{0.32\mathrm{m}\times 0.866}=144\mathrm{N}$$

故

$$F_B=F_A=144\mathrm{N}$$

(2) 再选杆 CD 为研究对象，画受力图。它所受的力有：力偶、C 和 D 处铰链反力。DE 为二力直杆，故 $\boldsymbol{F}_D$ 沿 ED 方向。按照平面力偶系平衡条件，$\boldsymbol{F}_C$ 必与 $\boldsymbol{F}_D$ 平行且反向[图 3.14(c)]。

列出平面力偶系平衡方程式

$$\sum M=0,\quad -M_O+F_C\times\frac{0.24}{\sqrt{(0.18)^2+(0.24)^2}}\times CD=0 \tag{b}$$

得

$$F_C=\frac{5M_O}{4\times0.32\text{m}}=\frac{5\times40\text{N}\cdot\text{m}}{4\times0.32\text{m}}=156\text{N}$$

注意：本例是由平衡力偶系平衡条件确定铰链反力方位。

本章小结

1. 力矩是力学中的一个基本概念。它是度量力对物体转动效应的物理量，在平面问题中它是代数量，可按下式计算：

$$M_O(\boldsymbol{F})=\pm Fh=\pm 2A_{\triangle OAB}$$

一般以逆时针转向为正，反之为负。

2. 力偶和力一样是力学中的两个基本元素。

(1) 力偶是由等值、反向、不共线的两个平行力所组成的特殊力系，它对物体只产生转动效应，可用力偶矩来度量，即

$$M=\pm Fd$$

(2) 力偶没有合力，不能与一个力等效，力偶只能用力偶来平衡。

(3) 力偶在任意坐标轴上的投影等于零。力偶对任一点之矩恒等于力偶矩，与矩心的位置无关。

(4) 力偶的主要性质是等效性。在保持力偶矩不变的条件下，可任意改变力和力偶臂的大小，并可在作用面内任意转移。

3. 平面力偶系合成的结果是一个合力偶，合力偶矩等于各力偶矩的代数和。即

$$M=\sum_{i=1}^{n}M_i$$

4. 平面力偶系的平衡方程是：

$$\sum_{i=1}^{n}M_i=0$$

它是解平面力偶系平衡问题的基本方程，运用这个平衡方程，可求解一个未知量。

思 考 题

1. 图3.15中设$AB=l$，在A点受4个大小均等于F的力$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$和$\boldsymbol{F}_4$作用。试分别计算每个力对B点之矩。

2. 图3.16中的胶带传动，若仅包角α变化而其他条件均保持不变时，试问使胶带轮转动的力矩是否改变？为什么？

3. 图3.17中力的单位为N，长度单位为mm。试分析图示4个力偶，哪些是等效的？哪些是不等效的？

4. 一力偶($\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_1'$)作用在Oxy平面内，另一力偶($\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_2'$)作用在Oyz平面内，力偶矩之绝对值相等(图3.18)，试问2力偶是否等效？为什么？

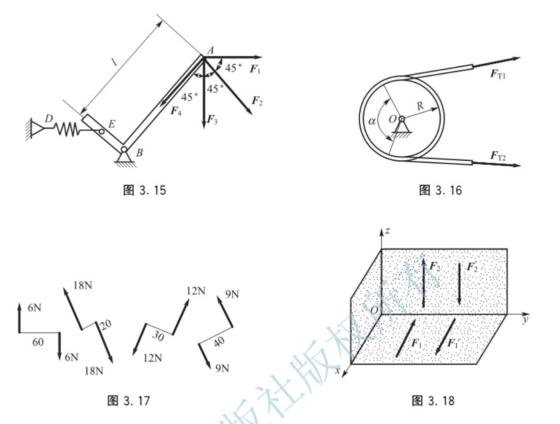


图 3.15　　　　图 3.16

图 3.17　　　　图 3.18

5. 图 3.19(a)中刚体受同平面内 2 力偶($\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_3$)和($\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_4$)的作用，其力多边形封闭，如图 3.19(b)所示，问该物体是否处于平衡？为什么？

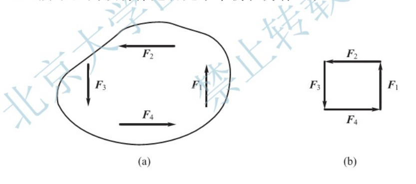


图 3.19

6. 图 3.20 中力的单位为 N，长度单位为 mm，物体处于平衡，试确定铰链 A 处约束反力的方向。

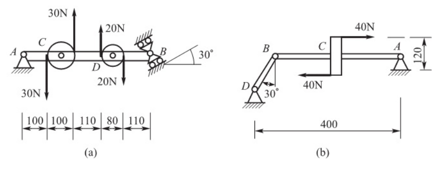


图 3.20

习　　题

3-1　试分别计算图 3.21 所示各种情况下力 F 对 O 点之矩。

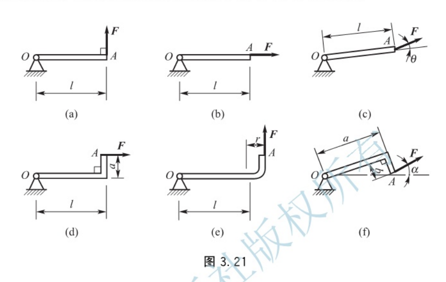


图 3.21

3-2　已知 $F_1=F_2=F_3=F_5=60\text{N}$，$F_4=F_6=40\text{N}$，图中长度单位为 mm。求图 3.22 示平面力偶系合成结果。

3-3　图 3.23 为卷扬机简图，重物 M 放在小台车 C 上，小台车上装有 A 轮和 B 轮，可沿导轨 ED 上下运动。已知重物重量 $P=2\text{kN}$，图中长度单位为 mm，试求导轨对 A 轮和 B 轮的约束反力。

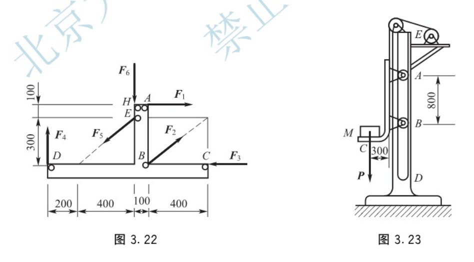


图 3.22　　　　图 3.23

3-4　如图 3.24 所示，锻锤工作时，如工件给它的反作用力有偏心，则会使锻锤 C 发生偏斜，这将在导轨 AB 上产生很大的压力，从而加速导轨的磨损并影响锻件的精度。已知打击力 $F=1000\text{kN}$，偏心距 $e=20\text{mm}$，锻锤高度 $h=200\text{mm}$。试求锻锤给导轨两侧的压力。

3-5　炼钢用的电炉上，有一电极提升装置，如图 3.25 所示，设电极 HI 和支架共重 W，重心在 C 点。支架上 A、B 和 E 3 个导轮可沿固定立柱 JK 滚动，钢丝绳系在 D 点。求电极等速直线上升时钢丝绳的拉力及 A、B、E 3 处的约束反力。

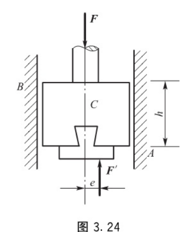


图 3.24

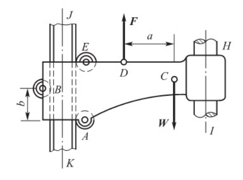


图 3.25

3－6　已知 $M_1=3\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_2=1\text{kN}\cdot\text{m}$，转向如图 3.26 所示。$a=1\text{m}$，试求图示刚架的 A 及 B 处约束反力。

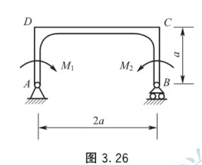


图 3.26

3－7　四连杆机构在图 3.27 所示位置平衡，$\alpha=30°$，$\beta=90°$。试求平衡时 M_1/M_2 的值。

3－8　如图 3.28 所示，曲柄滑道机构，杆 AE 上有一导槽，套在杆 BD 的销子 C 上，销子 C 可在光滑导槽内滑动。已知 $M_1=4\text{kN}\cdot\text{m}$，转向如图所示，$AB=2\text{m}$，在图示位置处于平衡，$\theta=30°$。试求 M_2 及铰链 A 和 B 的约束反力。

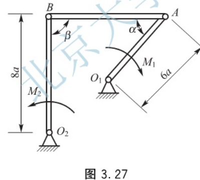


图 3.27

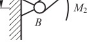


图 3.28

第4章 平面一般力系

【教学提示】

本章主要研究平面力系最复杂的情况——平面一般力系的合成与平衡问题。

【学习要求】

通过本章的学习，记住力的平移定理和合力矩定理。会利用力的平移定理把平面一般力系向一点简化，并求其结果。重点是利用平衡方程求解平面一般力系的平衡问题，难点是利用平衡方程求解物体系统的平衡问题。要加强练习，务必掌握。要了解什么是静定和超静定问题以及简单桁架内力的计算。

4.1 平面一般力系在工程中的实例

在工程中会经常遇到平面一般力系的问题，即作用在物体上的各力的作用线都分布在同一平面内，既不全汇交于一点，也不完全平行，这种力系称为平面一般力系。例如，图4.1所示的房架，受风力 $\boldsymbol{F}_1$、荷载 $\boldsymbol{F}_2$ 和支座反力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$、$\boldsymbol{F}_{Ay}$、$\boldsymbol{F}_B$ 的作用，显然这是一个平面一般力系。又如图4.2所示的悬臂吊车的横梁，受载荷 $\boldsymbol{F}_1$，重力 $\boldsymbol{F}_2$，支座反力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$、$\boldsymbol{F}_{Ay}$ 和拉杆拉力 $\boldsymbol{F}_T$ 的作用，显然，这也是一个平面一般力系。

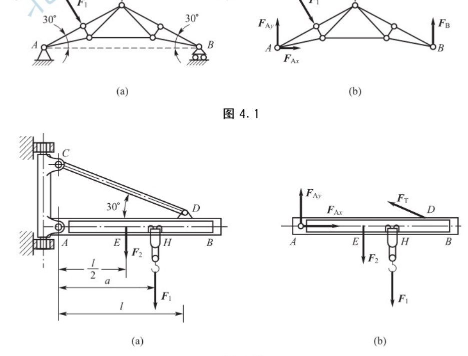


图4.1

图4.2

此外，如物体结构所承受的荷载和支承都具有同一个对称面，则也可以将作用在物体上的力系简化为对称平面内的平面力系来处理。例如上料车，就可以将它所受的重力 $\boldsymbol{P}$、拉力 $\boldsymbol{F}$ 及前后轮的 4 个反力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$ 简化成其对称面的平面力系来处理，如图 4.3 所示。

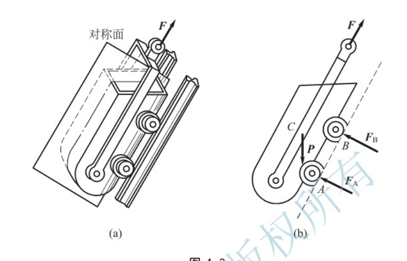


图 4.3

平面一般力系是工程上最常见的力系。因此，对它的研究尤为重要。

4.2 力的平移定理

力系向一点简化是一种较为简便并具有普遍性的力系简化方法。此方法的理论基础是力的平移定理。

定理 作用在刚体上的力 $\boldsymbol{F}$ 可以平行移动到刚体内的任一点，但必须同时附加一个力偶，其力偶矩等于原力 $\boldsymbol{F}$ 对新作用点的力矩。

证明 设一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于 A 点，如图 4.4(a)所示。在刚体上任取一点 B，在 B 点加上大小相等、方向相反且与力 $\boldsymbol{F}$ 平行的两个力 $\boldsymbol{F}'$ 和 $\boldsymbol{F}''$，并使 $F'=F''=F$ [图 4.4(b)]。显然，力系($\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}'$，$\boldsymbol{F}''$)与力 $\boldsymbol{F}$ 是等效的。但力系($\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}'$，$\boldsymbol{F}''$)可看做是一个作用在 B 点的力 $\boldsymbol{F}'$ 和一个力偶($\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}''$)。于是，原来作用在 A 点的力 F，现在被一个作用在 B 点的力 $\boldsymbol{F}'$ 和一个力偶($\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}''$)所代替 [图 4.4(c)]。也就是说，可以把作用于 A 点的力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线平移到 B 点，但必须同时附加一个力偶，此附加力偶矩为

$$M=F\cdot d$$

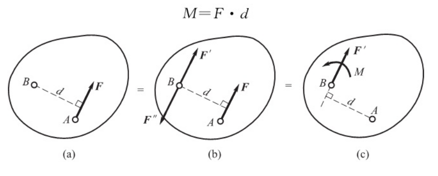


图 4.4

而乘积 Fd 又是原力 $\boldsymbol{F}$ 对 B 点的力矩，即

$$M_B(\boldsymbol{F})=F\cdot d$$

因此得

$$M=M_B(\boldsymbol{F})$$

定理得证。

力的平移定理不仅是力系简化的依据，而且也是分析力对物体作用效应的一个重要方法。例如，图 4.5(a)中转轴上大齿轮受到圆周力 F 的作用。

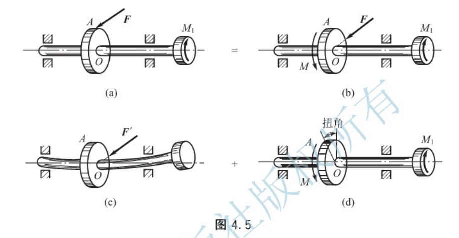


图 4.5

为了观察力 $\boldsymbol{F}$ 对转轴的效应，将力 $\boldsymbol{F}$ 向轴心 O 点平移。根据力的平移定理，力 $\boldsymbol{F}$ 平移到轴心 O 点时，要附加一个力偶［图 4.5(b)］。设齿轮的节圆半径为 r，则附加力偶矩为

$$M=Fr$$

由此可见，力 $\boldsymbol{F}$ 对转轴的作用相当于在轴上作用一个水平力 $\boldsymbol{F}'$ 和一个力偶。力偶作用在垂直于轴线的平面内，它与轴端输入的力偶使轴产生扭转，而力 $\boldsymbol{F}'$ 则使轴产生弯曲［图 4.5(c)、(d)］。

4.3 平面一般力系向平面内任一点简化·主矢与主矩

设刚体上作用有 3 个力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_n$ 组成的平面一般力系，如图 4.6(a)所示。在力系所在的平面内任选一点 O，称为简化中心。应用力的平移定理，把各力都平移到 O 点。这样，得到作用于 O 点的力 $\boldsymbol{F}_1'$、$\boldsymbol{F}_2'$、$\boldsymbol{F}_n'$，以及相应的附加力偶($\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_1''$)，($\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_2''$)，($\boldsymbol{F}_n$，$\boldsymbol{F}_n''$)，它们的力偶矩分别是 $M_1=F_1d_1=M_O(F_1)$，$M_2=-F_2d_2=M_O(F_2)$，$M_n=F_nd_n=M_O(F_n)$。

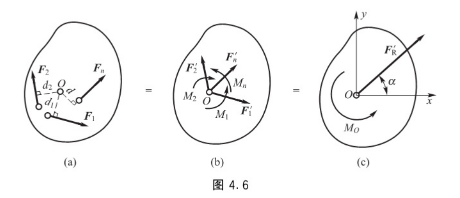


图 4.6

这样，原来的平面一般力系就被分解为一个平面汇交力系和一个平面力偶系，如图 4.6(b)所示。显然，原力系与此二力系的作用是等效的。然后再分别合成这两个力系。

平面汇交力系 $\boldsymbol{F}_1'$、$\boldsymbol{F}_2'$、$\boldsymbol{F}_n'$可按力多边形法则合成为一个合力 $\boldsymbol{F}_R'$，作用于 O 点，其矢量 $\boldsymbol{F}_R'$等于各力 $\boldsymbol{F}_1'$、$\boldsymbol{F}_2'$、$\boldsymbol{F}_n'$的矢量和。因为 $\boldsymbol{F}_1'$、$\boldsymbol{F}_2'$、$\boldsymbol{F}_n'$分别与 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_n$ 大小相等、方向相同，所以

$$\boldsymbol{F}_R' = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum \boldsymbol{F} \tag{4-1}$$

矢量 $\boldsymbol{F}_R'$称为原力系的主矢［图 4.6(c)］。

平面力偶系 M_1、M_2、M_n 可以合成为一个合力偶，这个合力偶矩 M_O 等于各附加力偶矩的代数和，即

$$M_O = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = M_O(\boldsymbol{F}_1) + M_O(\boldsymbol{F}_2) + \cdots + M_O(\boldsymbol{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} M_O(\boldsymbol{F}_i) \tag{4-2}$$

M_O 称为原力系对简化中心的主矩［图 4.6(c)］，它等于原力系中各力对简化中心 O 点力矩的代数和。

综上所述，可以得到如下结论：平面一般力系向作用面内任一点 O 简化，可以得到一个力和一个力偶。这个力作用于简化中心，称为原力系的主矢，其矢量等于原力系中各力的矢量和。

$$\boldsymbol{F}_R' = \sum \boldsymbol{F}$$

这个力偶矩称为原力系对简化中心的主矩。

$$M_O = \sum M_O(\boldsymbol{F}_i)$$

注意，力系的主矢 $\boldsymbol{F}_R'$只是原力系中各力的矢量和，所以它与简化中心的选择无关。而力系对简化中心的主矩 M_O 一般与简化中心的选择有关，选择不同的点作为简化中心时，各力的力臂一般会改变，因而各力对简化中心的力矩也将随之改变。

现在讨论主矢 $\boldsymbol{F}_R'$的解析求法。建立直角坐标系 Oxy［图 4.6(c)］，由合力投影定理得

$$F_{Rx}' = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum F_x$$
$$F_{Ry}' = F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum F_y$$

于是主矢 $\boldsymbol{F}_R'$的大小和方向可由下式确定

$$\left.\begin{aligned} & F_R' = \sqrt{F_{Rx}'^2 + F_{Ry}'^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \\ & \cos\alpha = \frac{\sum F_x}{\sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}},\ \cos\beta = \frac{\sum F_y}{\sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}} \end{aligned}\right\} \tag{4-3}$$

式中：α 和 β 分别表示主矢 $\boldsymbol{F}_R'$与 x 轴和 y 轴正向间的夹角。

4.4 简化结果的讨论及合力矩定理

平面一般力系向作用面内任一点简化的结果可能有 4 种情况，即①$F_R'=0$，$M_O\neq0$；②$F_R'\neq0$，$M_O=0$；③$F_R'\neq0$，$M_O\neq0$；④$F_R'=0$，$M_O=0$。下面逐个进行分析讨论。

(1) $F_R'=0$，$M_O\neq0$，则原力系简化为一个力偶，此时原力系与一个力偶等效，说明原力系就是一个力偶系。因力偶对平面内任一点的矩都相同，所以在这种情况下，主矩与

简化中心的选择无关。也就是说，不论向哪一点简化都是这个力偶，而且力偶矩保持不变。

(2) $F'_R \neq 0$，$M_O=0$，则 $\boldsymbol{F}'_R$ 即为原力系的合力 $\boldsymbol{F}_R$。通过简化中心，这种情况说明简化中心选得太巧了，正好使得原力系中的力对简化中心的力矩正负相互抵消等于零。

(3) $F'_R \neq 0$，$M_O \neq 0$ [图 4.7(a)]，这并不是简化的最后结果，可以根据力的平移定理的逆过程，把主矩 M_O 和主矢 $\boldsymbol{F}'_R$ 简化为一个合力 $\boldsymbol{F}_R$。现将 M_O 用两个力 $\boldsymbol{F}_R$ 和 $\boldsymbol{F}''_R$ 表示，并令 $\boldsymbol{F}'_R=\boldsymbol{F}_R=-\boldsymbol{F}''_R$[图 4.7(b)]。再去掉平衡力系($\boldsymbol{F}'_R$、$\boldsymbol{F}''_R$)，而只剩下作用在 O_1 点的力 $\boldsymbol{F}_R$，这便是原力系的合力 [图 4.7(c)]。合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的大小和方向与主矢 $\boldsymbol{F}'_R$ 相同，而合力的作用线与简化中心 O 的距离为

$$d=M_O/F'_R=M_O/F_R \tag{4-4}$$

至于合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的作用线在 O 点的哪一侧，可以由主矩 M_O 的转向决定。

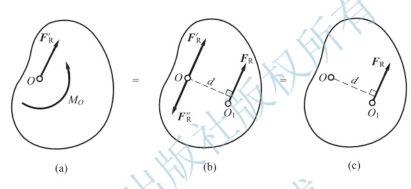


图 4.7

(4) $F'_R=0$，$M_O=0$，则原力系平衡，这种情况将在下节讨论。

合力矩定理：当平面一般力系可以合成为一个合力时，则其合力对作用面内任一点的力矩等于力系中各分力对同一点力矩的代数和。

证明：由图 4.7(c)可知，合力 $\boldsymbol{F}_R$ 对 O 点的矩为

$$M_O(\boldsymbol{F}_R)=F_R d$$

又由图 4.7(b)可知，$M_O=F_R d$

所以 $$M_O(\boldsymbol{F}_R)=M_O$$

又因为 $$M_O=\sum M_O(\boldsymbol{F})$$

故

$$M_O(\boldsymbol{F}_R)=\sum M_O(\boldsymbol{F}) \tag{4-5}$$

由于简化中心 O 是任选的，因此上述定理适用于任一力矩中心。利用这个定理可以求出合力作用线的位置，并用分力矩来计算合力矩。

例 4.1 水平梁 AB 受三角形分布荷载的作用，如图 4.8 所示，分布荷载的最大值为 q，梁长 l，试求合力的大小及作用线的位置。

解：在梁上距 A 端为 x 的微段 dx 上，作用力的大小为 $q_x dx$。其中 $q_x=\dfrac{x}{l}q$，故分布力的合力 F 可用积分求得

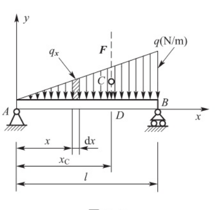


图 4.8

$$F=\int_0^l q_x \mathrm{d}x=\int_0^l \frac{q}{l}x\,\mathrm{d}x=\frac{ql}{2}$$

设合力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线距 A 端的距离为 x_C，则合力 $\boldsymbol{F}$ 对 A 点的力矩为

$$M_A(\boldsymbol{F})=Fx_C$$

作用在微段 $\mathrm{d}x$ 上的合力对 A 点的力矩为 $xq_x\mathrm{d}x$。全部分布力对 A 点的力矩的代数和可用积分求出

$$\int_0^l q_x x\,\mathrm{d}x=\int_0^l \frac{q}{l}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{ql^2}{3}$$

由合力矩定理得

$$F\cdot x_C=\frac{ql^2}{3}$$

故

$$x_C=\frac{ql^2}{3F}$$

将 $F=ql/2$ 代入上式，则

$$x_C=\frac{2}{3}l$$

计算结果说明：合力大小等于三角形分布荷载的面积，合力作用线通过该三角形的几何中心。

例 4.2 作用在物体上的力系如图 4.9(a)所示。已知 $F_1=1\text{kN}$，$F_2=1\text{kN}$，$F_3=2\text{kN}$，$M=4\text{kN}\cdot\text{m}$，$\theta=30°$，长度单位为 m。试求力系向 O 点简化的初步结果以及力系最终简化结果。

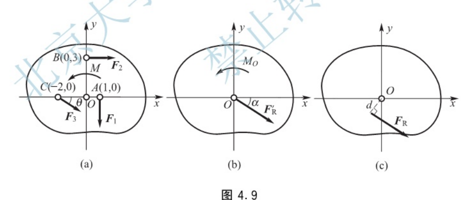


图 4.9

解：本例属于平面一般力系简化问题，其理论公式为式(4-2)、式(4-3)及式(4-4)。

(1) 先求力系向 O 点简化的初步结果

$$\sum F_x=F_3\cos\theta+F_2=2\text{kN}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\text{kN}=2.73\text{kN}$$

$$\sum F_y=-F_1-F_3\sin\theta=-1\text{kN}-2\text{kN}\times\frac{1}{2}=-2\text{kN}$$

故主矢 F'_R 的大小及方向为 $F'_R=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2}=\sqrt{(2.73\text{kN})^2+(-2\text{kN})^2}=3.39\text{kN}$

$$\cos\alpha=\frac{2.73}{3.39}=0.805,\quad \cos\beta=\frac{-2}{3.39}=-0.590$$

$$\alpha=-36.2°$$

又主矩 M_O 为

$$M_O=\sum M_O(F)=-1\text{m}F_1-3\text{m}\cdot F_2+2\text{m}\cdot\sin30°\cdot F_3+M$$
$$=-1\text{m}\times1\text{kN}-3\text{m}\times1\text{kN}+2\text{m}\times\frac{1}{2}\times2\text{kN}+4\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$=2\text{kN}\cdot\text{m}$$

结果如图 4.9(b)所示。

(2) 再求力系最终简化结果。

由于主矢 $F'_R\neq0$，$M_O\neq0$，故力系最终简化结果为一合力 $\boldsymbol{F}_R$，$\boldsymbol{F}_R$ 的大小和方向与主矢 $\boldsymbol{F}'_R$ 相同。合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的作用线距 O 点的距离为 d：

$$d=M_O/F_R=2\text{kNm}/3.39\text{kN}=0.59\text{m}$$

M_O 为正值，表示主矩逆时针转动，合力 $\boldsymbol{F}_R$ 的作用线如图 4.9(c)所示。

4.5 平面一般力系的平衡条件与平衡方程及应用

上节提到，如果平面一般力系简化到最后结果是主矢和主矩都等于零的情况，即 $F'_R=0$，$M_O=0$。显然，主矢等于零，表明作用于简化中心 O 的汇交力系为平衡力系；主矩等于零，表明附加力偶系也是平衡力系。因此，平面一般力系必为平衡力系。

于是，平面一般力系平衡的必要和充分条件是：力系的主矢和对任一点的主矩都等于零。由式(4-2)、式(4-3)可得

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_x=0\\&\sum F_y=0\\&\sum M_O(\boldsymbol{F})=0\end{aligned}\right\}\tag{4-6}$$

由此可得结论，平面一般力系平衡的解析条件是：力系中各力在两个正交的坐标轴中每一轴上的投影的代数和分别等于零，并且各力对平面内任意一点力矩的代数和也等于零。式(4-6)称为平面一般力系的平衡方程，它是平衡方程的基本形式。

平衡方程共有 3 个，所以只能求解 3 个未知量。解题时，为了简化计算，尽量把矩心选在两个未知力的交点上。而坐标轴应尽可能与该力系中多数未知力的作用线垂直。

例 4.3 水平外伸梁如图 4.10(a)所示。若均布荷载 $q=20\text{kN/m}$，$F_1=20\text{kN}$，力偶矩 $M=16\text{kN}\cdot\text{m}$，$a=0.8\text{m}$，求 A、B 点的约束反力。

解：(1) 选梁为研究对象，画出受力图［图 4.10(b)］。作用于梁上的力有 $\boldsymbol{F}_1$、均布荷载 q 的合力 $\boldsymbol{F}_2$($F_2=qa$，作用在分布荷载区段的中点)、矩为 M 的力偶和支座反力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$、$\boldsymbol{F}_{Ay}$ 及 $\boldsymbol{F}_B$。显然它们是一个平面一般力系，取坐标轴，如图 4.10(b)所示。

(2) 列平面一般力系平衡方程。

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}=0\tag{a}$$

$$\sum F_y=0,\quad -qa-F_1+F_{Ay}+F_B=0\tag{b}$$

$$\sum M_A(F)=0,\quad M+qa\cdot\frac{a}{2}-F_1\cdot2a+F_B\cdot a=0\tag{c}$$

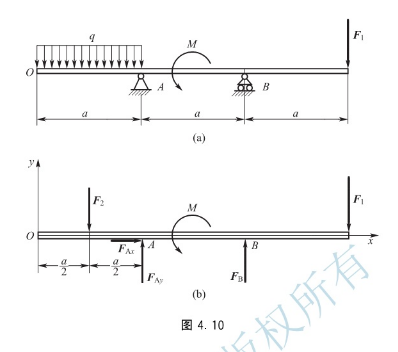


图 4.10

由式(c)得

$$F_B = -\frac{M}{a} - \frac{qa}{2} + 2F_1 = 12\text{kN}$$

将 F_B 值代入式(b)得

$$F_{Ay} = qa + F_1 - F_B = 24\text{kN}$$

例 4.4 悬臂吊车如图 4.11(a)所示。横梁 AB 长 $l=2.5\text{m}$，重量 $P=1.2\text{kN}$。拉杆 CB 倾斜角 $\alpha=30°$，质量不计。载荷 $F=7.5\text{kN}$。求图示位置 $a=2\text{m}$ 时，拉杆的拉力和铰链 A 的约束反力。

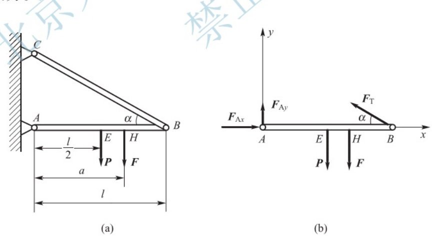


图 4.11

解：(1) 选横梁 AB 为研究对象。

(2) 画受力图。

作用于横梁上的力有重力 $\boldsymbol{P}$(在横梁中点)、载荷 $\boldsymbol{F}$、拉杆的拉力 $\boldsymbol{F}_T$ 和铰链 A 的约束反力 $\boldsymbol{F}_A$。因 CB 是二力杆，故拉力 $\boldsymbol{F}_T$ 沿 CB 连线；$\boldsymbol{F}_A$ 方向未知，故分解为两个分力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Ay}$。显然各力的作用线分布在同一个平面内，而且组成平衡力系［图 4.11(b)］。

(3) 列平衡方程，求未知量。

选坐标系如图 4.11(b)所示，运用平面一般力系的平衡方程得

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}-F_T\cos\alpha=0 \tag{a}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-P-F+F_T\sin\alpha=0 \tag{b}$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad F_T\sin\alpha\cdot l-P\cdot\frac{l}{2}-F\cdot a=0 \tag{c}$$

由式(c)解得

$$F_T=\frac{1}{l\sin\alpha}\left(P\cdot\frac{l}{2}+F\cdot a\right)=13.2\text{kN}$$

将 F_T 值代入式(a)得

$$F_{Ax}=F_T\cos\alpha=11.43\text{kN}$$

将 F_T 值代入式(b)得

$$F_{Ay}=P+F-F_T\sin\alpha=2.1\text{kN}$$

算得 F_{Ax}、F_{Ay} 皆为正值，表示假设的指向与实际的指向相同。

(4) 分析讨论。从上面的计算可以看出，杆 CB 所承受的拉力和铰链 A 的约束反力，是随载荷的位置不同而改变的，因此应当根据这些力的最大值来进行设计。

在本例中如写出对 A、B 两点的力矩方程和对 x 轴的投影方程，同样可以求解，即

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}-F_T\cos\alpha=0 \tag{d}$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad F_T\sin\alpha\cdot l-P\cdot\frac{l}{2}-F\cdot a=0 \tag{e}$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad P\cdot\frac{l}{2}-F_{Ay}\cdot l+F\cdot(l-a)=0 \tag{f}$$

由式(e)解得

$$F_T=13.2\text{kN}$$

由式(f)解得

$$F_{Ay}=2.1\text{kN}$$

由式(d)解得

$$F_{Ax}=11.43\text{kN}$$

如写出对 A、B、C 这 3 点的力矩方程，同样也可求解，即

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad F_T\sin\alpha\cdot l-P\cdot\frac{l}{2}-F\cdot a=0 \tag{g}$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad P\cdot\frac{l}{2}-F_{Ay}l+F\cdot(l-a)=0 \tag{h}$$

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{Ax}\tan\alpha\cdot l-P\frac{l}{2}-Fa=0 \tag{i}$$

由式(g)解得

$$F_T=13.2\text{kN}$$

由式(h)解得

$$F_{Ay}=2.1\text{kN}$$

由式(i)解得

$$F_{Ax}=11.43\text{kN}$$

从上面的分析可以看出，平面一般力系平衡方程除了前面所表示的基本形式外，还有其他形式，即二力矩式和三力矩式，其形式如下

$$\left.\begin{array}{r}\sum F_x=0(\text{或}\sum F_y=0)\\ \sum M_A(\boldsymbol{F})=0\\ \sum M_B(\boldsymbol{F})=0\end{array}\right\} \tag{4-7}$$

其中 A、B 两点的连线不能与 x 轴(或 y 轴)垂直。

$$\left.\begin{array}{r}\sum M_A(\boldsymbol{F})=0\\ \sum M_B(\boldsymbol{F})=0\\ \sum M_C(\boldsymbol{F})=0\end{array}\right\} \tag{4-8}$$

其中 A、B、C 这 3 点不能选在同一条直线上。

如不满足上述条件，则所列的 3 个平衡方程将不都是独立的。应该注意，不论选用哪一组形式的平衡方程，对于同一个平面一般力系来说，最多只能列出 3 个独立的方程，因而只能求出 3 个未知量。

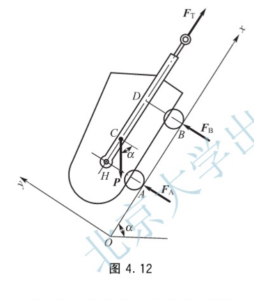


图 4.12

例 4.5 高炉上料小车如图 4.12 所示。设 $\alpha=60°$，$AB=2400\text{mm}$，$HC=800\text{mm}$，$AH=1300\text{mm}$，$P=325\text{kN}$，钢丝绳与轨道平行，不计车轮与轨道之间的摩擦，试求上料小车等速运行时钢丝绳的拉力 $\boldsymbol{F}_T$ 及轨道对车轮的约束反力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$。

解：(1) 选上料小车为研究对象，画上料小车的受力图。作用于车上的力有重力 $\boldsymbol{P}$、钢丝绳的拉力 $\boldsymbol{F}_T$ 和约束反力 $\boldsymbol{F}_A$、$\boldsymbol{F}_B$。$\boldsymbol{F}_T$ 的方向沿着钢丝绳，$\boldsymbol{F}_A$、$\boldsymbol{F}_B$ 垂直于斜面。

(2) 选择坐标轴，如图 4.12 所示，列平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad F_T-P\sin\alpha=0 \tag{a}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_A+F_B-P\cos\alpha=0 \tag{b}$$

$$\sum M_H(F)=0,\quad AB\cdot F_B-HC\cdot P\cos\alpha=0 \tag{c}$$

在式(c)中计算力 $\boldsymbol{P}$ 对 H 点的力矩时，可以将力 $\boldsymbol{P}$ 分解成两个分力，然后应用合力矩定理，计算分力对 H 点力矩的代数和。

由式(a)得

$$F_T=P\sin\alpha=325\text{kN}\times0.886=282\text{kN}$$

由式(c)得

$$F_B=\frac{HC}{AB}\cdot P\cos\alpha=54.2\text{kN}$$

将 F_B 值代入式(b)得

$$F_A=P\cos\alpha-F_B=108.3\text{kN}$$

例 4.6 图 4.13(a)中的车刀固定在刀架上，已知 $l=60\text{mm}$，切削力 $F_y=18\text{kN}$，$F_x=7.2\text{kN}$，求固定端 A 的约束反力。

解：(1) 首先分析固定端 A 点的约束情况。所谓固定端约束，就是物体受约束的一端既不能向任何方向移动，也不能转动。例如，将电线杆插入地面，工件用卡盘夹紧固定，以及车刀固定在刀架上等，这些物体所受的约束都是固定端约束(或插入端约束)。图 4.13

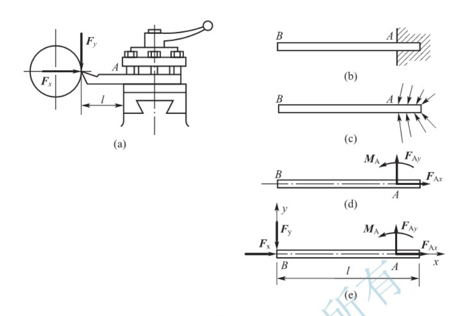


图 4.13

(b)是固定端的简化表示法。这类约束的约束反力是分布在接触面上的平面一般力系，如图 4.13(c)所示。若将此力系向 A 点简化，则得到一个约束反力 $\boldsymbol{F}_A$(通常用两个互相垂直的分力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$、$\boldsymbol{F}_{Ay}$表示)和一个反力偶矩 M_A［图 4.13(d)］。

(2) 画受力图。车刀在切削力 $\boldsymbol{F}_y$、$\boldsymbol{F}_x$ 和固定端约束反力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$、$\boldsymbol{F}_{Ay}$及约束反力偶矩 M_A 的作用下平衡［图 4.13(e)］。

(3) 选择坐标轴，如图 4.13(e)所示，列平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_x=0 \tag{a}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-F_y=0 \tag{b}$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad M_A+F_y\cdot l=0 \tag{c}$$

由式(a)解得

$$F_{Ax}=-F_x=-7.2\text{kN}$$

由式(b)解得

$$F_{Ay}=F_y=18\text{kN}$$

由式(c)解得

$$M_A=-F_y\cdot l=-1.08\text{kN}\cdot\text{m}$$

F_{Ax}为负值，表示假设的指向与实际的指向相反。M_A 为负值，表示假设的转向与实际的转向相反，M_A 为顺时针转向。

4.6 平面平行力系的平衡方程

在工程中经常会遇到平面平行力系问题。所谓平面平行力系，就是各力的作用线都在同一平面内且互相平行的力系。平面平行力系是平面一般力系的一种特殊情况，所以，它的平衡方程可直接根据平面一般力系的平衡方程导出。设物体受平面平行力系 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$ 的作用(图 4.14)。若取 Ox 轴与力系垂直，显然，不论力系能否平衡，各力在

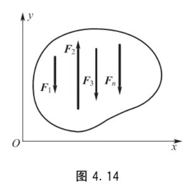


图 4.14

x 轴上的投影恒等于零，即 $\sum F_x \equiv 0$。判断力系能否平衡，只需确定力系在 y 轴上的投影的代数和和对平面内任一点的力矩的代数和是否等于零即可，因此平面平行力系的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}\sum F_y=0\\ \sum M_O(\boldsymbol{F})=0\end{aligned}\right\} \tag{4-9}$$

即平面平行力系平衡的必要和充分条件是：力系中各力在不与力作用线垂直的坐标轴上投影的代数和等于零及各力对任一点力矩的代数和等于零。

平面平行力系的平衡方程也可用二矩式形式表示

$$\left.\begin{aligned}\sum M_A(\boldsymbol{F})=0\\ \sum M_B(\boldsymbol{F})=0\end{aligned}\right\} \tag{4-10}$$

其中 A、B 两点的连线不能与各力的作用线平行。

由此可见，平面平行力系的平衡方程只有两个，因此最多只能求出两个未知量。

例 4.7 塔式起重机机架重为 P，其作用线离右轨 B 的距离为 e，轨距为 b，最大载重 P_1 离右轨的最大距离为 l，平衡配重 P_2 的作用线离左轨 A 的距离为 a [图 4.15(a)]。欲使起重机满载及空载时均不翻倒，求平衡配重的重量 P_2。

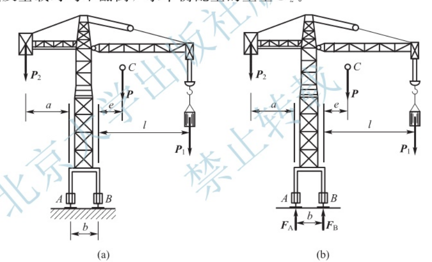


图 4.15

解：(1) 先研究满载时的情况。此时，作用在起重机上的力有 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$、$\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$ [图 4.15(b)]。若起重机在满载时翻倒，将绕 B 点顺时针转动，若保证不翻倒，那么起重机所受的力必须满足平衡方程 $\sum M_B(\boldsymbol{F})=0$，在临界条件下，$F_A=0$，这时求出的 P_2 值是所允许的最小值。

$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad P_{2\min}(a+b)-P\cdot e-P_1 l=0 \tag{a}$$

得

$$P_{2\min}=\frac{Pe+P_1 l}{a+b}$$

(2) 再研究空载时的情况。此时，作用于起重机上的力有 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{P}_2$、$\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$。若起重机在空载时翻倒，将绕 A 点逆时针转动，为了保证不翻倒，在临界条件下，$F_B=0$，这时求出的 P_2 值是所允许的最大值。

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0;\quad P_{2\max}\cdot a-P(b+e)=0 \tag{b}$$

得

$$P_{2\max}=\frac{P(b+e)}{a}$$

起重机不翻倒时，平衡配重 P_2 应满足的条件为

$$\frac{Pe+P_1 l}{a+b}\leqslant P_2\leqslant\frac{P(b+e)}{a}$$

4.7 静定与超静定问题简介

对于不同的力系所能够列的独立平衡方程的数目都是一定的。比如，对于平面汇交力系可以列出两个独立平衡方程，对于平面力偶系可以列出一个独立平衡方程，对于平面一般力系可以列出 3 个独立平衡方程。因此，对于不同的力系所能够解出来的未知数目也是一定的。如果所研究的问题属于某种力系，未知量的个数正好等于这种力系所能列的独立平衡方程的数目，则由平衡方程就能把所有的未知量求出，这样的问题属于静定问题。如果某种力系的未知量超过了这种力系所能列的独立平衡方程数目，显然仅用平衡方程是无法求出全部未知量的，这类问题属于超静定问题。此外，超静定还有关于次数的问题，未知量的个数比所能列的独立平衡方程的个数多“几个”，就称为“几次”超静定。到目前为止，前面所举的所有例子都是静定问题。在工程实际中，有时为了提高结构的刚度和坚固性，不得不采用超静定结构。

必须指出，超静定问题并不是不能解决的问题，而只是不能仅用平衡方程来解决的问题。这是因为在静力学中将物体抽象为刚体，不考虑物体的变形，如果考虑到物体受力后的变形，找出变形和力之间的关系，列出补充方程，超静定问题是可以解决的。显然，属于几次超静定就得建立几个补充方程。也就是说平衡方程的个数加上补充方程的个数应该等于未知量的个数。具体如何建立补充方程，将在材料力学部分去研究。

下面分别举一个静定和一个超静定的例子，在图 4.16 所示的简支梁中，约束反力有 3 个。因此，根据平面一般力系的 3 个平衡方程就能全部解出，这是静定问题。而在图 4.17 所示的梁中，有 4 个未知量，却只有 3 个独立的平衡方程，属于一次超静定问题。

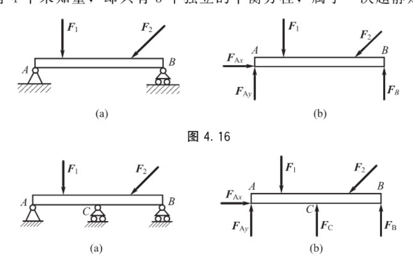


图 4.16

图 4.17

4.8 物体系统的平衡问题

工程结构往往都是由许多构件通过一定的连接方式而形成的一个整体，这个整体称为物体系统。研究物体系统的平衡问题时，不仅要研究系统以外的物体对系统的作用，同时还要研究物体系统内部各物体之间的相互作用。

当物体系统平衡时，组成该系统的每一个物体都处于平衡状态。判断物体系统是否静定的问题较为复杂。对于每一个受平面一般力系作用的物体，均可写出 3 个平衡方程。如物体系统由 n 个物体组成，则共有 $3n$ 个独立方程。当系统中的未知量数目等于独立平衡方程的数目时，则所有未知量都能由平衡方程求出，这时系统属于静定的；反之属于超静定系统。

由于物体系统是由许多物体组成的，因此，解物体系统的平衡问题时，就有一个选择研究对象的问题。有时可以先取整体，后取部分，有时可以先取部分，后取整体。总之，选择的思路是：先选取运用平衡方程能确定某些未知量的部分为研究对象。

下面举例说明物体系统平衡问题的解法。

例 4.8 图 4.18 所示的构架由直角弯杆 AEC 和直杆 CB 组成，不计各杆自重，荷载分布及尺寸如图 4.18(a)所示。已知 q、a、$F=\sqrt{2}qa$、$M=2qa^2$ 及 $\theta=45°$，试求固定端 A 的约束反力 F_{Ax}、F_{Ay}及反力偶 M_A。

解：(1) 先判断物体系统是否是静定系统。

物体系统由两部分组成，具有 6 个独立平衡方程及 6 个未知量，它是静定系统。

(2) 恰当地选取研究对象。

若选取整体为研究对象，它有 3 个独立平衡方程，但有 4 个未知量，不能求出固定端 A 的全部未知力。为此，先选杆 CB 为对象，求出 $\boldsymbol{F}_B$。再选整个系统为研究对象，求出 A 处的约束反力。

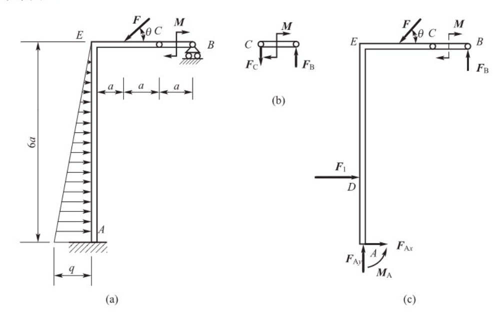


图 4.18

(3) 先对 CB 杆进行研究。

杆 CB 受平面力偶系作用处于平衡，B 为可动铰支座，从而确定 F_B 和 F_C 的方向(图 4.18(b))。

列平衡方程：

$$\sum M=0,\quad F_B\cdot a-M=0 \tag{a}$$

由式(a)得

$$F_B=\frac{M}{a}=2qa$$

(4) 再对整个系统进行研究。

作用在物体系统上的主动力为 $\boldsymbol{F}$、分布荷载合力 $\boldsymbol{F}_1$ 及力偶 M，约束反力有 B 处的 $\boldsymbol{F}_B$，A 处的 $\boldsymbol{F}_{Ax}$、$\boldsymbol{F}_{Ay}$ 及 M_A [图 4.18(c)]。

按照例 4.1 中的分析，分布荷载合力 $\boldsymbol{F}_1$ 的方向与分布荷载相同，作用在 D 点，大小为三角形的面积。

$$F_1=\frac{1}{2}q(6a)=3qa$$

$$AD=\frac{1}{3}AE=\frac{1}{3}(6a)=2a$$

列平面一般力系平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_1-F\cos45^\circ=0 \tag{b}$$

由式(b)得

$$F_{Ax}=-F_1+F\cos45^\circ=-2qa$$

负号表示 $\boldsymbol{F}_{Ax}$ 的指向与假设方向相反。

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F_B-F\sin45^\circ=0 \tag{c}$$

由式(c)得

$$F_{Ay}=-F_B+F\cos45^\circ=-qa$$

负号表示 $\boldsymbol{F}_{Ay}$ 的指向与假设方向相反。

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0$$

$$M_A-M-F_1(2a)+F_B(3a)-F\sin\theta\cdot a+F\cos\theta(6a)=0 \tag{d}$$

由式(d)得

$$M_A=-3qa^2$$

负号表示 M_A 的转向与图 4.18 所示的假设方向相反。

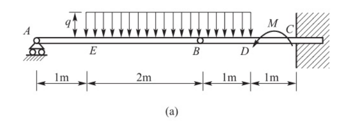
例 4.9 组合梁 AB 和 BC 在 B 点铰接，C 为固定端 [图 4.19(a)]。若 $M=20\text{kN}\cdot\text{m}$，$q=15\text{kN/m}$，试求 A、B、C 这 3 点处的约束反力。

解： (1) 判断物体系统是否是静定系统。

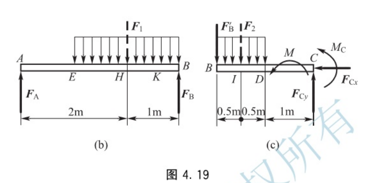
梁 ABC 有 6 个未知量和 6 个独立平衡方程，系统静定。

(2) 恰当地选取研究对象。

先选 AB 部分进行研究，画出 AB 的受力图 [图 4.19(b)]，由平面平行力系平衡条件



(a)



(b) (c)

图 4.19

可以确定 $\boldsymbol{F}_B$ 的方位。列平衡方程

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad 3F_B-2F_1=0 \tag{a}$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad -3F_A+F_1=0 \tag{b}$$

其中，

$$F_1=BE\cdot q=30\text{kN}$$

由式(a)得

$$F_B=\frac{2}{3}F_1=20\text{kN}$$

由式(b)得

$$F_A=\frac{1}{3}F_1=10\text{kN}$$

（3）再选 BC 部分进行研究。

画出 BC 部分的受力图，如图 4.19(c)所示，列平衡方程

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0,\quad 2F_B'+1.5F_2+M+M_C=0 \tag{c}$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad 2F_{Cy}-0.5F_2+M+M_C=0 \tag{d}$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Cx}=0 \tag{e}$$

其中，$F_2=BD\cdot q=1\text{m}\times15\text{kN/m}=15\text{kN}$

由式(c)得

$$\begin{aligned}M_C&=-2F_B'-M-1.5\times F_2=-2\text{m}\times20\text{kN}-20\text{kN}\cdot\text{m}-1.5\text{m}\times15\text{kN}\cdot\text{m}\\&=-82.5\text{kN}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

由(d)式得

$$F_{Cy}=\frac{1}{2}(0.5F_2-M_C-M)=\frac{1}{2\text{m}}[0.5\text{m}\times15\text{kN}-(-82.5\text{kN}\cdot\text{m})-20\text{kN}\cdot\text{m}]=35\text{kN}$$

例 4.10 图 4.20(a)所示为一井架，它由两个桁架组成，在 C 处用圆柱铰链连接。两桁架的重心各在 C_1 和 C_2 点，它们的重量各为 $P_1=P_2=P_0$，在左边桁架上作用着水平风

力 $\boldsymbol{F}$。尺寸 l、H、h 和 a 均已知，求 A、B、C 这 3 点处的约束反力。

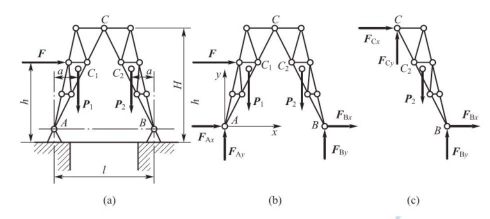


图 4.20

解：（1）判断物体系统是否是静定系统。

物体系统由两部分组成，共有 6 个约束反力，可列出 6 个独立平衡方程。因此，系统是静定的。

（2）恰当地选取研究对象。

本题从表面看不论选左边、选右边还是选整体，都是 4 个未知数，而平衡方程只有 3 个，看似无法下手。其实本题有一个特点，就是 A、B 两支座在一条水平线上，这样对 A 点取矩，没有 F_{Bx}，对 B 点取矩，没有 F_{Ax}。基于此种原因，本题应先取整体为研究对象，画出受力图，如图 4.20(b)所示。列平衡方程

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{By}\cdot l-P_1a-P_2\cdot(l-a)-F\cdot h=0 \tag{a}$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad -F_{Ay}\cdot l-F\cdot h+P_1(l-a)+P_2\cdot a=0 \tag{b}$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_{Bx}+F=0 \tag{c}$$

由式(a)得

$$F_{By}=\frac{P_o l+Fh}{l}$$

由式(b)得

$$F_{Ay}=\frac{P_o l-Fh}{l}$$

由式(c)暂时还解不出 F_{Ax}、F_{Bx}但找出了它们之间的关系。

（3）再取 BC 为研究对象，此时 C 点的约束反力成为外力，必须画出，受力图如图 4.20(c)所示。列平衡方程

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{By}\cdot\frac{l}{2}+F_{Bx}\cdot H-P_2\left(\frac{l}{2}-a\right)=0 \tag{d}$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Bx}+F_{Cx}=0 \tag{e}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{By}+F_{Cy}-P_2=0 \tag{f}$$

将 F_{By}代入式(d)得

$$F_{Bx}=\frac{1}{H}\left[P_2\left(\frac{1}{2}-a\right)-F_{By}\cdot\frac{l}{2}\right]=-\frac{1}{2H}(2P_0a+Fh)$$

由式(e)得

$$F_{Cx}=-F_{Bx}=\frac{1}{2H}(2P_0a+Fh)$$

将 F_{By} 代入式(f)得

$$F_{Cy}=P_2-F_{By}=-\frac{Fh}{l}$$

再将 F_{Bx} 代入式(c)得

$$F_{Ax}=-F_{Bx}-F=\frac{1}{2H}(2P_0a+Fh-2FH)$$

F_{Bx}、F_{Cy} 为负值表示假设的方向与实际方向相反。

归纳以上例题得出求解物体系统平衡问题的要点如下。

(1) 判断物体系统是否属于静定系统。

当物体系统的未知量的总数等于物体系统独立平衡方程的总数时，物体系统为静定系统。关键是要正确计算这两种总数。

① 将物体系统拆成一个个单个的物体，计算每个物体的未知量及独立平衡方程的数目，再求和。

② 对于圆柱铰链约束反力一律视为两个未知量，固定端约束反力一律视为 3 个未知量。

(2) 恰当地选择研究对象。

以解题简便为原则，先选择受力情况简单而且独立平衡方程的个数与未知量的个数相等的部分或整体为研究对象。

(3) 受力分析。

① 首先从二力构件入手，可使受力图比较简单。

② 解除约束时，要严格按照约束的性质画出约束反力，切忌凭主观想象画力。

③ 画受力图时，内力不画，遇到圆柱铰链约束，除二力构件外，通常都用两个分力表示约束反力。

④ 两个物体间的相互作用力必须符合作用与反作用定律。

(4) 列平衡方程，求解未知量。

① 列出恰当的平衡方程，避免在方程中出现不需要求的未知量。要灵活运用力矩方程，恰当选择两个未知力的交点为矩心，所选的坐标轴应与较多的未知力垂直。

② 解题时先从未知量最少的方程入手，尽量避免解联立方程。

③ 如果求得的约束反力或反力偶矩为负值，表示力的指向或力偶的转向与受力图中的假设方向相反。用它求解其他未知量时，应连同其负号一起代入其他平衡方程。

4.9 平面桁架的内力计算

在工程中，房屋建筑、桥梁、起重机、油田井架、电视塔等结构物常用桁架结构。桁架是一种由杆件在两端用铰链连接而成的结构，它在受力后几何形状不变。如桁架所有的杆件都在同一平面内，这种桁架称为平面桁架。桁架中杆件的接头称为节点。图 4.21 为

桁架结构的简图。

图 4.21

桁架的优点是：杆件主要承受拉力或压力，可以充分发挥材料的作用，节约材料，减轻结构的重量。

为了简化桁架内力的计算，在工程实际中采用以下几个假设。

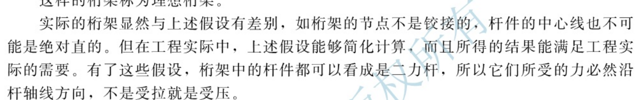
(1) 桁架的杆件都是直的。

(2) 杆件用光滑的铰链连接。

(3) 桁架所受的力都作用在节点上，而且在桁架的平面内。

(4) 桁架的自重忽略不计，或平均分配在节点上。

这样的桁架称为理想桁架。

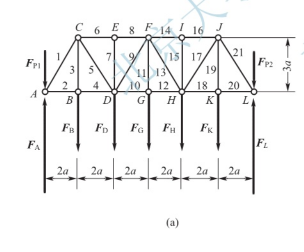


实际的桁架显然与上述假设有差别，如桁架的节点不是铰接的，杆件的中心线也不可能是绝对直的。但在工程实际中，上述假设能够简化计算，而且所得的结果能满足工程实际的需要。有了这些假设，桁架中的杆件都可以看成是二力杆，所以它们所受的力必然沿杆轴线方向，不是受拉就是受压。

本节将介绍两种计算桁架内力的方法：节点法和截面法。

4.9.1 节点法

例 4.11 某桁架结构如图 4.22 所示，已知 $F_{P1}=F_{P2}=F_P$，$F_B=F_D=F_G=F_H=F_K=2F_P$，几何尺寸如图 4.22 所示，用节点法求 1 至 6 各杆的内力。



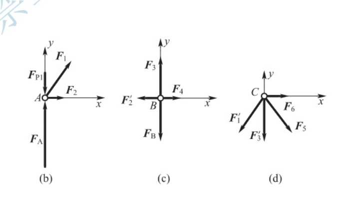


图 4.22

解：(1) 先求约束反力。取整个桁架为研究对象，受力图如图 4.22(a)所示。列平衡方程，求出 F_A 和 F_L。也可根据对称性直接求得

$$F_A=F_L=\frac{1}{2}(F_{P1}+F_B+F_D+F_G+F_H+F_K+F_{P2})=\frac{1}{2}(2\times F_P+5\times 2F_P)=6F_P$$

(2) 求桁架各杆的内力。节点法就是假想的用一截面把节点从整体中截出来，画出节点的受力图。作用在节点上的力有被截断杆的内力，外荷载和支座反力，它们组成一个平面汇交力系。因此，用节点法求内力实际上就是求解平面汇交力系的平衡问题。

解题时，应先从只含两个未知内力的节点开始截起，列平衡方程，依次求解。

本题应先从节点 A 开始截起。可先假设各杆均受拉力，节点 A 的受力图如图 4.22(b) 所示。选坐标系 Axy，列平面汇交力系的平衡方程

$$\sum F_x=0;\quad F_2+\frac{2a}{\sqrt{(2a)^2+(3a)^2}}F_1=0 \tag{a}$$

$$\sum F_y=0;\quad F_A-F_{p1}+\frac{3a}{\sqrt{(2a)^2+(3a)^2}}F_1=0 \tag{b}$$

由式(b)得

$$F_1=\frac{\sqrt{(2a)^2+(3a)^2}}{3a}(F_{P1}-F_A)=-6.01F_P\text{(压力)}$$

由式(a)得

$$F_2=-\frac{2a}{\sqrt{(2a)^2+(3a)^2}}F_1=3.33F_P\text{(拉力)}$$

其次，选节点 B 为研究对象，受力图如图 4.22(c)所示，列平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad F_4-F_2'=0 \tag{c}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_3-F_B=0 \tag{d}$$

由式(c)得

$$F_4=F_2'=F_2=3.33F_P\text{(拉力)}$$

由式(d)得

$$F_3=F_B=2F_P$$

最后，选节点 C 为研究对象，受力图如图 4.22(d)所示，列平衡方程

$$\sum F_x=0;\quad F_6+\frac{2}{\sqrt{13}}F_5-\frac{2}{\sqrt{13}}=0 \tag{e}$$

$$\sum F_y=0;\quad -F_3'-\frac{3}{\sqrt{13}}F_5-\frac{3}{\sqrt{13}}F_1'=0 \tag{f}$$

由式(f)得

$$F_5=-F_1'-\frac{\sqrt{13}}{3}F_3'=-(-6.01F_P)-\frac{\sqrt{13}}{3}\times 2F_P=3.61F_P\quad\text{(拉力)}$$

由式(e)得

$$F_6=\frac{2}{\sqrt{13}}(F_1'-F_5)=\frac{2}{\sqrt{13}}(-6.01-3.61)F_P=-5.33F_P\quad\text{(压力)}$$

在计算结果中，内力为正值表示杆受拉力，反之表示杆受压力。

4.9.2 截面法

例 4.12 用截面法求例 4.11 中第 14 杆的内力。

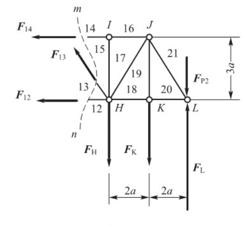


图 4.23

解：（1）求支座反力，见例 4.11。

（2）假想的用一截面 $m-n$ 将杆 12、13、14 截断，取右侧桁架为研究对象，并假设各杆均受拉力，其受力图如图 4.23 所示。它是一个平面一般力系，可列 3 个平衡方程，求出 F_{12}、F_{13}、F_{14} 这 3 个未知量，但本题只要求 F_{14} 一个未知数，所以只列一个方程即可。

$$\sum M_H(\boldsymbol{F})=0;\quad F_{14}\cdot 3a-F_K\cdot 2a-F_{P2}4a+F_L 4a=0 \tag{a}$$

解得

$$F_{14}=\frac{a}{3a}(2F_K+4F_{P2}-4F_L)=\frac{1}{3}(2\times 2F_P+4\times F_P-4\times 6F_P)=-5.33F_P\quad（压力）$$

用截面法解题时，每次截断未知内力的杆件不能超过 3 根，因为平面一般力系只能列 3 个独立平衡方程，求解 3 个未知量。

求平面桁架杆件内力的要点如下。

（1）节点法。

① 先选只含两根杆的节点为研究对象，然后逐个取仅含两个未知内力的杆件的节点为研究对象。

② 画受力图时，假设各杆都受拉力，指向背离节点，每个节点的受力图都属于平面汇交力系。

③ 对于每个节点，可列两个平衡方程，求得两个未知量，结果为正值，表示此杆受拉力，反之，表示此杆受压力。

④ 当内力为负值时，不必在受力图上更改此内力的指向，只需在之后的计算中将求得的内力值连同负号一起代入，这相当于自动更正了相应内力的指向。

（2）截面法

① 假想的用一截面把桁架截断，使桁架分成两部分，通常截断的未知内力的杆件不超过 3 根，选择其中的一部分桁架为研究对象。

② 画受力图时，假设各杆内力均为拉力，画出的受力图属于平面一般力系，可列 3 个平衡方程，求解 3 个未知量。

③ 关于内力的正负号，意义与节点法一样。

本章小结

本章用解析法研究了平面一般力系的简化与平衡。以力的平移定理为基础，将平面一般力系向平面内任一点简化，得到一个主矢 $\boldsymbol{F}'_R$ 和一个主矩 M_O，从而建立了平面一般力系的平衡条件和平衡方程。

1．力的平移定理

力平移时必须附加一个力偶，附加力偶矩等于原力对新作用点的力矩。

2. 平面一般力系的简化

(1) 简化过程:

平面一般力系 $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n)$ 向一点 O 简化
$$\begin{cases}\text{平面汇交力系}(\boldsymbol{F}_1', \boldsymbol{F}_2', \cdots, \boldsymbol{F}_n') \xrightarrow{\text{合成}} \text{主矢} \boldsymbol{F}_R' \quad \boldsymbol{F}_R' = \sum \boldsymbol{F} \\ \text{平面力偶系}(\boldsymbol{F}_1', \boldsymbol{F}_1''), (\boldsymbol{F}_2', \boldsymbol{F}_2''), \cdots, (\boldsymbol{F}_n', \boldsymbol{F}_n'') \xrightarrow{\text{合成}} \text{主矩} M_O \quad M_O = \sum M_O(\boldsymbol{F}_i)\end{cases}$$

(2) 简化结果,见表 4-1。

表 4-1 简化结果

主矢	主矩	合成结果	说明
$F_R' \neq 0$	$M_O = 0$	合力	合力作用线通过简化中心
	$M_O \neq 0$	合力	简化中心至合力作用线的距离 $d = \frac{\lvert M_O \rvert}{F_R'}$
$F_R' = 0$	$M_O \neq 0$	力偶	力偶矩等于主矩 M_O,与简化中心的位置无关
	$M_O = 0$	平衡	

3. 平面一般力系平衡方程的三种形式

(1) 基本形式:
$$\left.\begin{array}{r}\sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0\end{array}\right\}$$

(2) 二矩式:
$$\left.\begin{array}{r}\sum F_x = 0 (\text{或} \sum F_y = 0) \\ \sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0 \\ \sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0\end{array}\right\}$$

其中 A、B 两点的连线不能与 x 轴(或 y 轴)垂直。

(3) 三矩式:
$$\left.\begin{array}{r}\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0 \\ \sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0 \\ \sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0\end{array}\right\}$$

其中 A、B、C 不能选在同一直线上。

4. 平面平行力系平衡方程的两种形式

(1) 基本形式:
$$\left.\begin{array}{r}\sum F_y = 0 \\ \sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0\end{array}\right\}$$

y 轴不垂直于力作用线

(2) 二矩式
$$\left.\begin{array}{r}\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0 \\ \sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0\end{array}\right\}$$

其中 A、B 两点的连线不能与各力的作用线平行。

5. 平面桁架内力计算的两种方法(表 4－2)

表 4－2 平面桁架内力计算方法

方法名称	研究对象	受力图	平衡方程
节点法	节点	平面汇交力系	$\sum F_x=0$ $\sum F_y=0$
截面法	一部分 桁架	平面一般力系	$\sum F_x=0$ $\sum F_y=0$ $\sum M_O(\boldsymbol{F})=0$

思 考 题

1. 司机操纵方向盘驾驶汽车时，可用双手对方向盘施加一个力偶，也可用单手对方向盘施加一个力，采用这两种方式能否达到同样的效果？这是否说明一个力与一个力偶等效？为什么？

2. 将图 4.24(a)中的力 F_A 向 B 点平移，其附加力偶如图 4.24(b)所示，对不对？为什么？

3. 先将图 4.25 中作用于 D 点的力 F 平移至 E 点成为 F'，附加相应的力偶，然后求铰链 C 的约束反力，对不对？为什么？

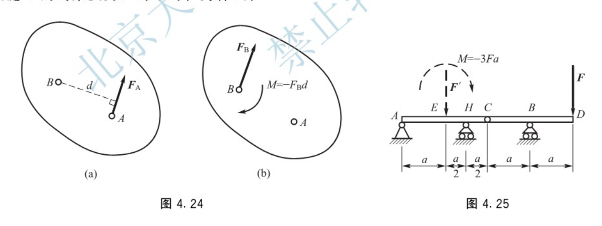


图 4.24　　图 4.25

4. 组合梁如图 4.26 所示，解题时需选取梁 CD 为研究对象画受力图，试问应如何处理作用在销钉 C 上的力 F_2？

5. 边长为 a 的等边刚体三角形 ABC 的 3 个顶点上，分别沿边作用着 3 个大小相等的力 $F_1=F_2=F_3=F_0$，如图 4.27 所示。将此力系向三角形中心 O 简化，得主矢 $F'_R=$________，主矩 $M_O=$________。

6. 力 F_1、F_2、F_3，分别作用在物体上 A、B、C 3 点，它们的大小正好和 3 点间的距离 AB、BC、CA 成正比(图 4.28)，$\triangle ABC$ 表示由 F_1、F_2、F_3 组成的封闭的力三角形。试问此物体是否平衡？

7. 作用在正方形薄板上 A、B、C、D 和 E 点的 4 个力组成的力系如图 4.29 所示，且

$F_1=F_4=\sqrt{2}F$，$F_2=F_3=F$。试问力系分别向 C 点和 H 点简化，结果是什么？两者是否等效？为什么？

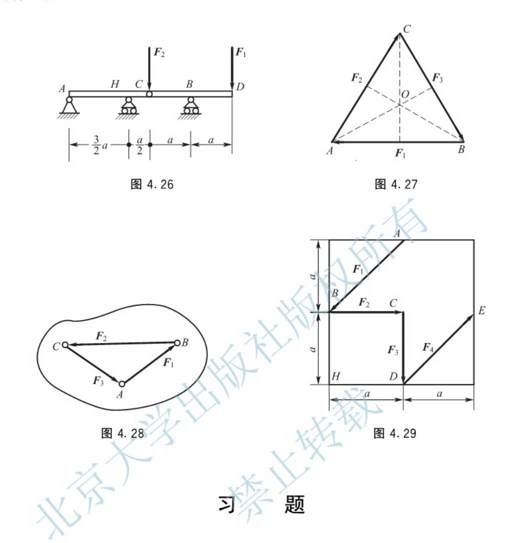


图 4.26

图 4.27

图 4.28

图 4.29

习　题

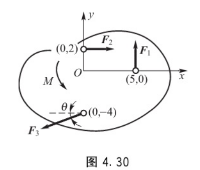


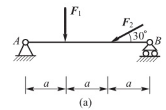
图 4.30

4-1　已知 $F_1=60\text{N}$，$F_2=80\text{N}$，$F_3=150\text{N}$，$M=100\text{N}\cdot\text{m}$，转向为逆时针，$\theta=30°$，图中距离单位为 m。试求图 4.30 中力系向 O 点简化的结果及最终结果。

4-2　试求图 4.31 各梁或刚架的支座反力。

4-3　试求图 4.32 各梁的支座反力。

4-4　各刚架的载荷和尺寸如图 4.33 所示，图(c)中 $M_2>M_1$，试求刚架的各支座反力。



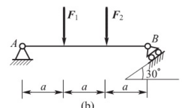


图 4.31

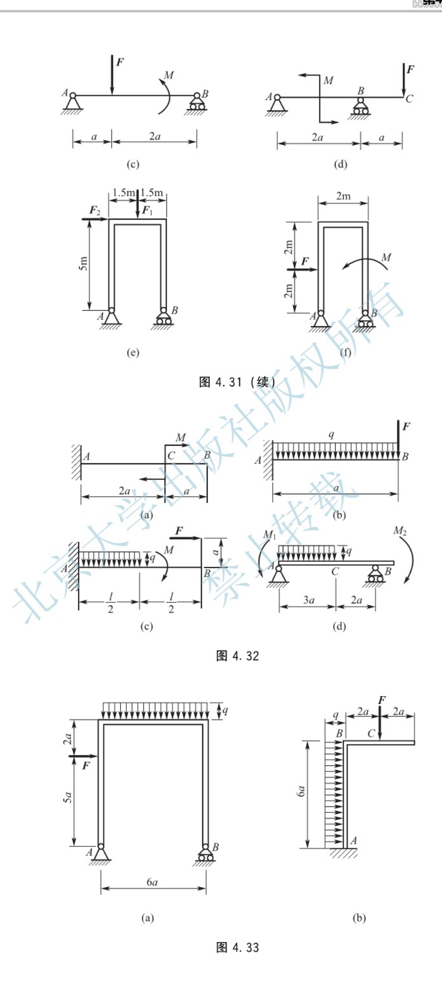


图 4.31（续）

图 4.32

图 4.33

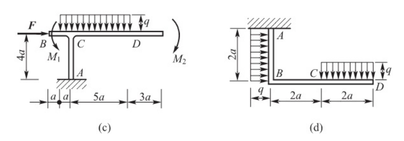


图 4.33(续)

4－5　起重机简图如图 4.34 所示，已知 F_1、F_2、a、b 及 c，求向心轴承 A 及向心推力轴承 B 的反力。

4－6　在汽车式起重机中，车重 $P_1=26\text{kN}$，起重臂 CDE 重 $P_3=4.5\text{kN}$，起重机旋转及固定部分重 $P_2=31\text{kN}$，作用线通过 B 点，几何尺寸如图 4.35 所示，这时起重臂在该起重机对称面内，求最大起重量 $P_{\max}$。

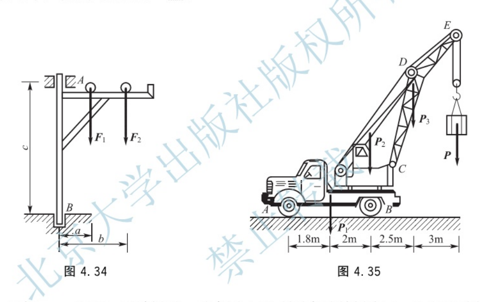


图 4.34　　图 4.35

4－7　已知 a、q 和 M，不计梁重。试求图 4.36 所示各连续梁在 A、B 和 C 处的约束反力。

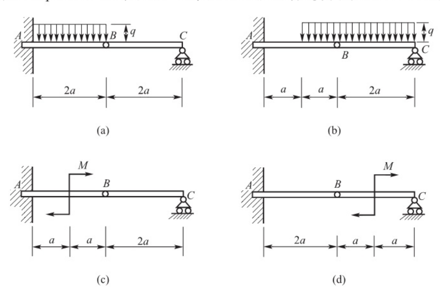


图 4.36

4-8　各刚架的载荷和尺寸如图 4.37 所示，不计刚架质量，试求刚架上各支座反力。

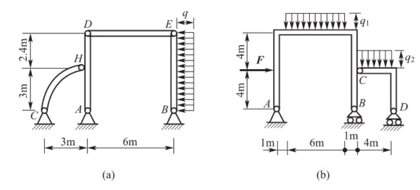


图 4.37

4-9　如图 4.38 所示，起重机在连续梁上，已知 $P_1=10\text{kN}$，$P_2=50\text{kN}$，不计梁质量，求支座 A、B 和 D 的反力。

4-10　如图 4.39 所示，厂房房架是由两个刚架 AC 和 BC 用铰链连接组成的，A 与 B 两铰链固结于地基上，吊车梁在房架突出部分 D 和 E 上。已知刚架重 $G_1=G_2=60\text{kN}$，吊车桥重 $P=20\text{kN}$，载荷 $W=10\text{kN}$，风力 $F=10\text{kN}$，几何尺寸如图 4.39 所示。D 和 E 两点分别在力 G_1 和 G_2 的作用线上。求铰链 A、B 和 C 的反力。

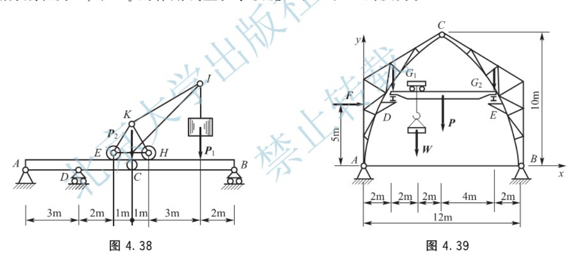


图 4.38　　图 4.39

4-11　桥式起重机机架的尺寸如图 4.40 所示。$F_F=100\text{kN}$，$F_H=50\text{kN}$，试求各杆内力。

4-12　如图 4.41 所示，屋架桁架的载荷 $F_C=F_E=F_G=F_J=F_L=F$，几何尺寸也在图 4.41 上给出。试求杆 1、2、3、4、5 和 6 的内力。

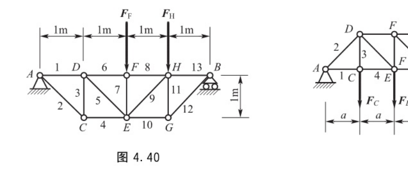


图 4.40　　图 4.41

第5章 摩　　擦

【教学提示】

本章主要研究摩擦问题，其分滑动摩擦和滚动摩擦。滑动摩擦又分静滑动摩擦和动滑动摩擦，重点是静滑动摩擦。然后介绍静滑动摩擦定律，摩擦角与自锁现象，最后简介滚动摩擦。

【学习要求】

通过本章的学习，了解静滑动摩擦的规律，记住最大静摩擦力的计算公式。重点是掌握考虑摩擦时平衡问题的计算，理解摩擦角的概念与自锁现象，了解滚动摩擦的有关概念。

5.1 工程中的摩擦问题

在前几章中，忽略了摩擦的影响，把物体之间的接触表面都看做是光滑的。但是，完全光滑的表面事实上并不存在，接触处或多或少会产生摩擦，有时甚至摩擦还起着主要作用，因此，某些场合对摩擦必须予以考虑。例如，摩擦制动器［图5.1(a)］，皮带传动［图5.1(b)］，摩擦轮传动［图5.1(c)］等，都是依靠摩擦力来进行工作的，这些都是摩擦有利的一面。但是摩擦也有它不利的一面。例如，由于摩擦的存在会给各种机械带来多余的阻力，从而消耗能量、降低效率，甚至会造成故障。研究摩擦的目的就是要掌握摩擦的规律，充分利用它有利的一面，尽可能地克服它不利的一面。

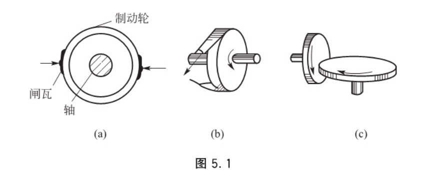


图5.1

摩擦按照物体表面相对运动的情况，可分为滑动摩擦和滚动摩擦。滑动摩擦是指两物体接触面作相对滑动或具有相对滑动趋势时所产生的摩擦。所以，滑动摩擦又分为动滑动摩擦和静滑动摩擦两种，滚动摩擦是一个物体在另一个物体上滚动时产生的摩擦，如轮子在道路上的滚动。

本章主要讨论滑动摩擦中的静滑动摩擦，其他摩擦只介绍基本概念。

5.2 滑动摩擦

5.2.1 静滑动摩擦定律

静滑动摩擦是两物体之间具有相对滑动趋势时的摩擦。为了观察物体之间产生静滑动摩擦的规律，可进行如下实验：物体重为W，放在水平面上，并由绳子系着，绳子绕过滑轮，下挂砝码［图5.2(a)］。如绳子和滑轮之间的摩擦不计。显然绳子对物体的拉力$\boldsymbol{F}$的大小就等于砝码的重量。从实验中可以看到，当砝码的重量较小时，即作用在物体上的拉力$\boldsymbol{F}$较小时，这个物体并没有滑动。这就说明接触面已经存在着一个阻止物体滑动的力$\boldsymbol{F}_s$。此力称静滑动摩擦力(简称静摩擦力)。它的方向与两物体间相对滑动趋势的方向相反，大小可由平衡方程求得［图5.2(b)］。

$$\sum F_x = 0;\quad F - F_s = 0$$

可得

$$F_s = F$$

图 5.2

如果逐渐增大砝码重量，即增大力$\boldsymbol{F}$，在一定范围内物体仍保持平衡，这表明在此范围内静摩擦力$\boldsymbol{F}_s$随着力$\boldsymbol{F}$的增大而增大，但是，进一步的实验说明，静摩擦力$\boldsymbol{F}_s$不可能随着力$\boldsymbol{F}$无限增大。当力$\boldsymbol{F}$增大到某个值时，物体处于将动而未动的临界平衡状态，这时静摩擦力$\boldsymbol{F}_s$达到最大值，称为最大静摩擦力，以$\boldsymbol{F}_{max}$表示。

静滑动摩擦定律：大量试验证明，最大静摩擦力的大小与法向反力成正比。即

$$F_{max} = f_s F_N \tag{5-1}$$

式中比例常数f_s称为静滑动摩擦因数(简称静摩擦因数)，f_s的大小与接触物体的材料、接触面的粗糙程度、温度、湿度等情况有关，而与接触面积的大小无关。一般材料的f_s值可在机械工程手册中查到。常见材料的f_s见表5-1。

表5-1 常用材料的摩擦因数

材料名称	摩擦因数			
	静摩擦因数(f_s)		动摩擦因数(f)	
	无润滑剂	有润滑剂	无润滑剂	有润滑剂
钢——钢	0.15	0.10～0.12	0.15	0.05～0.10
钢——铸铁	0.30		0.18	0.05～0.15
钢——青铜	0.15	0.10～0.15	0.15	0.10～0.15
铸铁——铸铁		0.18	0.15	0.07～0.12


（续）

材料名称	摩擦因数			
	静摩擦因数(f_s)		动摩擦因数(f)	
	无润滑剂	有润滑剂	无润滑剂	有润滑剂
铸铁——青铜			0.15～0.20	0.07～0.15
青铜——青铜		0.10	0.20	0.07～0.10
皮革——铸铁	0.30～0.50	0.15	0.60	0.15
橡皮——铸铁			0.80	0.50
木——木	0.40～0.60	0.10	0.20～0.50	0.07～0.15

由上述可见：静摩擦力 $\boldsymbol{F}_s$ 随着主动力 $\boldsymbol{F}$ 的不同而变化，它的大小由平衡方程确定，但介于零和最大值之间，即

$$0 \leqslant F_s \leqslant F_{max}$$

掌握了摩擦规律之后，我们就可以更好地利用摩擦来为我们服务，如生产中需要增大最大静摩擦力时，可以通过加大正压力和增大摩擦因数来实现；又如要减小最大静摩擦时，可以设法减小摩擦因数，使接触面制造的尽量光滑些，或者加入润滑剂等。

5.2.2 动滑动摩擦定律

由前面的试验可知，当拉力 F 增大到略大于 F_{max} 时，这时最大静滑动摩擦力已不足以阻碍物体向前滑动，物体相对滑动时出现的摩擦力，称为动滑动摩擦力(简称动摩擦力)，它的方向与两物体间相对滑动速度的方向相反。通过实验也可得出与静滑动摩擦定律相似的动滑动摩擦定律。即

$$F_d = fF_N \tag{5-2}$$

式中 f 称为动滑动摩擦因数(简称动摩擦因数)，一般情况下，$f < f_s$。它除了与接触面的材料、表面粗糙度、温度、湿度等有关外，还与物体的滑动速度有关，速度越大，f 越小。f 值见表 5-1。在一般工程中，精确度要求不高时，可近似认为动摩擦因数与静摩擦擦因数相等。

5.3 考虑摩擦时的平衡问题举例

考虑摩擦时物体的平衡问题，与不考虑摩擦时物体的平衡问题有着共同点，如物体平衡时都必须满足平衡条件，解题的方法步骤也基本相同，但有以下几个特点。

(1) 物体受力分析时，必须考虑接触面间的静摩擦力 $\boldsymbol{F}_s$，通常增加了未知量的数目。

(2) 为了确定这些新增加的未知量，还需列出补充方程，即 $F_s \leqslant f_s F_N$，补充方程的数目与摩擦力的数目相同。

(3) 由于物体平衡时摩擦力有一定的范围(即 $0 \leqslant F_s \leqslant f_s F_N$)，所以有摩擦时平衡问题的解也有一定范围，而不是一个确定的值。

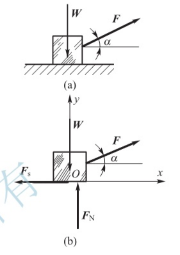
工程中有不少问题只需要分析平衡的临界状态，这时静摩擦力等于其最大值，补充方程只取等号。有时为了计算方便，也先在临界状态下计算，求得结果后再分析，讨论其解的平衡范围。

例 5.1 用绳子拉一重 $W=500\text{N}$ 的物体，拉力 $F=100\text{N}$，物体与地面间的摩擦因数 $f_s=0.2$，绳子与水平面的夹角 $\alpha=30°$［图 5.3(a)］。

试求：

(1) 设物体在图示位置处于平衡状态，此时静摩擦力 F_s 的大小。

(2) 如使物体产生滑动，求拉动此物体所需的最小力 F_{min}。



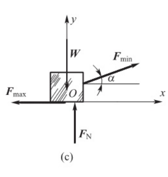


图 5.3

解：(1) 取物体为研究对象，受力图如图 5.3(b)所示，F_s 为静摩擦力，因为物体有向右的相对滑动趋势，所以 F_s 的方向向左，F_N 为法向反力。

(2) 列平衡方程，求未知量。

先求静摩擦力 F_s。选坐标系 Oxy，列出平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad F\cos\alpha-F_s=0$$

得

$$F_s=F\cos\alpha=100\text{N}\times0.867=86.7\text{N}$$

所以，此时静摩擦力的大小为

$$F_s=86.7\text{N}$$

为了求拉动物体所需的最小力 F_{min}，需要考虑物体将要滑动但还没有滑动的临界平衡状态，此时静摩擦力达到最大值。即

$$F_s=F_{max}=f_sF_N$$

按图 5.3(c)列出平衡方程及补充方程

$$\sum F_x=0,\quad F_{min}\cos\alpha-F_{max}=0 \tag{a}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{min}\sin\alpha-W+F_N=0 \tag{b}$$

$$F_{max}=f_sF_N \tag{c}$$

由式(b)得

$$F_N=W-F_{min}\sin\alpha$$

代入式(c)得

$$F_{max}=f_sF_N=f_s(W-F_{min}\sin\alpha)$$

代入式(a)得

$$F_{min}\cos\alpha-f_sW+f_sF_{min}\sin\alpha=0$$

所以

$$F_{min}=\frac{f_sW}{\cos\alpha+f_s\sin\alpha}=\frac{0.2\times500\text{N}}{\cos30°+0.2\sin30°}=103\text{N}$$

这就是拉动物体的最小拉力 $F_{min}=130\text{N}$。

例 5.2 在一个可调整倾角的斜面上放一物体重为 W，接触面间的摩擦因数为 f_s，试

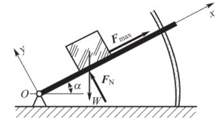


图 5.4

求物体刚开始下滑时斜面的倾角 α。

解：(1) 选物体为研究对象，画受力图如图 5.4 所示。

(2) 根据题意此时摩擦力应为 F_{max}。选坐标轴如图所示，列出平衡方程

$$\sum F_x=0;\ -W\sin\alpha+F_{max}=0 \tag{a}$$

$$\sum F_y=0;\ -W\cos\alpha+F_N=0 \tag{b}$$

补充方程

$$F_{max}=f_sF_N \tag{c}$$

由式(a)得 $F_{max}=W\sin\alpha$

由式(b)得 $F_N=W\cos\alpha$

代入式(c)得 $W\sin\alpha=f_sW\cos\alpha$

所以 $\tan\alpha=f_s$ 或 $\alpha=\arctan f_s$

分析讨论：由计算知，倾角 α 仅与摩擦因数 f_s 有关，而与物体的重量无关。如 $\alpha=15°$ $f_s=0.268$。这个例题提供了一种测定摩擦因数 f_s 的试验方法，将两种材料，一种做成物体，一种做成斜坡，将物体放在斜坡上，改变斜坡倾角，记录下物体刚刚下滑时(即临界平衡状态)的角度 α，那么这个倾角 α 的正切就是斜坡和物体这两种材料之间的摩擦因数 f_s。

例 5.3 如图 5.5(a)所示，由上例可知，当斜坡的倾角 α 大于某一值时，物体将向下滑动。此时在物体上加一水平力 $\boldsymbol{F}$，则能使物体在斜坡上维持平衡，试求力 F 值的范围。

解：前提是图 5.5(a)中的物体如果不加力 $\boldsymbol{F}$，肯定下滑。在这种前提下，如果加的力 F 太小，物体仍将向下滑动；但如果加的力太大，又将使物体向上滑动。

先求使物体不致下滑时所需的力 $\boldsymbol{F}$ 的最小值 F_{min}。由于物体有向下滑的趋势，所以摩擦力应沿斜坡向上，受力图如图 5.5(b)所示。

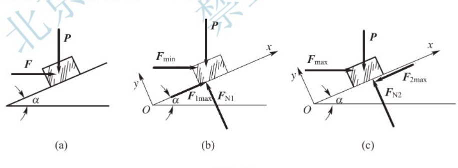


图 5.5

此时物体处于向下滑的临界平衡状态，列出平衡方程和补充方程

$$\sum F_x=0,\quad F_{min}\cos\alpha+F_{1max}-P\sin\alpha=0 \tag{a}$$

$$\sum F_y=0,\quad -F_{min}\sin\alpha+F_{N1}-P\cos\alpha=0 \tag{b}$$

$$F_{1max}=f_sF_{N1} \tag{c}$$

将式(c)代入式(a)，再由式(a)与式(b)解出

$$F_{min}=\frac{\sin\alpha-f_s\cos\alpha}{\cos\alpha+f_s\sin\alpha}P$$

再求使物体不致上滑时所需的力 $\boldsymbol{F}$ 的最大值 F_{max}。此时物体处于向上滑的临界平衡状态，摩擦力应沿斜坡向下，受力图如图 5.5(c)所示。列平衡方程和补充方程

$$\sum F_x=0,\quad F_{\max}\cos\alpha-F_{2\max}-P\sin\alpha=0 \tag{d}$$

$$\sum F_y=0,\quad -F_{\max}\sin\alpha+F_{N2}-P\cos\alpha=0 \tag{e}$$

$$F_{2\max}=f_s F_{N2} \tag{f}$$

同理可解出

$$F_{\max}=\frac{\sin\alpha+f_s\cos\alpha}{\cos\alpha-f_s\sin\alpha}P$$

所以，要维持物体在斜坡上平衡，力 F 的值应满足

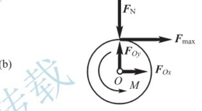
$$\frac{\sin\alpha-f_s\cos\alpha}{\cos\alpha+f_s\sin\alpha}P\leqslant F\leqslant\frac{\sin\alpha+f_s\cos\alpha}{\cos\alpha-f_s\sin\alpha}P$$

这就是所求的平衡范围。

例 5.4 图 5.6(a)为某制动器简图，已知制动器摩擦块与滑轮表面间的摩擦因数为 f_s，作用在滑轮上的力偶矩为 M，A 和 O 都是圆柱铰链，几何尺寸如图所示。求制动滑轮所需的最小力 $F_{\min}$。

(a)

(b)



(c)

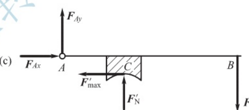


图 5.6

解： 当滑轮刚能停止转动时，力 $\boldsymbol{F}$ 的值最小，摩擦块与滑轮间的摩擦力达到最大值。取滑轮为研究对象，受力图如图 5.6(b)所示。因滑轮平衡，列平衡方程和补充方程如下：

$$\sum M_O(F)=0,\quad M-F_{\max}\cdot r=0 \tag{a}$$

$$F_{\max}=f_s F_N \tag{b}$$

由此可知

$$F_N=\frac{F_{\max}}{f_s}=\frac{M}{f_s r}$$

再取制动杆 AB 为研究对象，受力图如图 5.6(c)所示。因为制动杆平衡，同样可列出平衡方程及补充方程

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad F'_N a-F'_{\max}e-F_{\min}l=0 \tag{c}$$

$$F'_{\max}=f_s F'_N \tag{d}$$

由此可得

$$F_{\min}=\frac{F'_N(a-f_s e)}{l}$$

将 $F'_N=F_N=\dfrac{F_{\max}}{f_s}=\dfrac{M}{f_s r}$ 代入上式，得

$$F_{\min}=\frac{M(a-f_s e)}{f_s r l}$$

平衡时应为

$$F\geqslant\frac{M(a-f_s e)}{f_s r l}$$

这就是平衡时力 $\boldsymbol{F}$ 的平衡范围。

5.4 摩擦角与自锁现象

1. 摩擦角

图 5.7(a)表示水平面上有一物体，作用于物体上的主动力的合力为 $\boldsymbol{F}$，当考虑摩擦时，支承面对物体的约束反力不仅有法向反力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$，同时还有静摩擦力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$。法向反力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 与静摩擦力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$ 的合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 称为支承面对物体的全反力。全反力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 与法向反力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 之间的夹角 α 将随着静摩擦力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$ 的增大而增大，当物体处于将动未动的临界平衡状态时，即静摩擦力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$ 达到最大值 $F_{\max}$，这时夹角 α 也达到最大值 φ_f，我们把 φ_f 称为摩擦角，由图 5.7(b)可得

$$\tan\varphi_{\mathrm{f}}=\frac{F_{\max}}{F_{\mathrm{N}}}=\frac{f_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{N}}}{F_{\mathrm{N}}}=f_{\mathrm{s}} \tag{5-3}$$

即摩擦角的正切等于摩擦因数。可见摩擦角与摩擦因数都是表示材料的表面性质的量。

2. 自锁现象

由于静摩擦力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$ 的大小不能超过最大静摩擦力 $F_{\max}$，因此全反力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 与法向反力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 之间的夹角 α 也不可能大于摩擦角 φ_f，即全反力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 的作用线必在摩擦角之内。当物体处于临界平衡状态时，全反力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 的作用线正好在摩擦角的边缘。

根据摩擦角的性质可知。

(1) 如果作用在物体上全部主动力的合力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线在摩擦角之内［图 5.8(a)］，即 $\varphi\leqslant\varphi_{\mathrm{f}}$，则无论这个力怎样大，总有一个全反力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 与之平衡，物体保持静止。

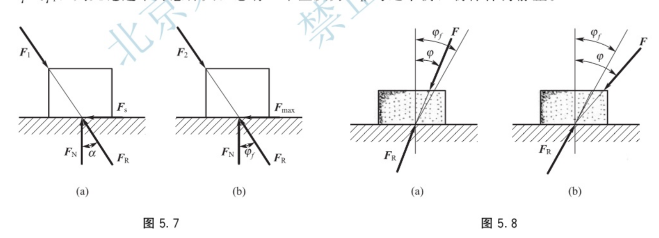


图 5.7　　图 5.8

(2) 如果全部主动力的合力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线在摩擦角之外［图 5.8(b)］，即 $\varphi>\varphi_f$，则无论这个力怎样小，全反力都无法与之平衡，物体也不可能保持静止。这种与力的大小无关而与摩擦角有关的平衡条件称为自锁条件，物体在这种条件下的平衡现象称为自锁现象。

物体在斜面上的情况，也可作同样的分析，如图 5.4 所示。只要主动力 $\boldsymbol{W}$ 与斜面法线的夹角 α(α 也是斜面的倾角)不大于摩擦角，即 $\alpha\leqslant\varphi_f$，则无论物体多重，都不会自动从斜面上滑下，物体处于平衡状态。如果斜面倾角 α 增大，即 $\boldsymbol{W}$ 与斜面法线之间的夹角增

大，当 $\alpha>\varphi_f$ 时，由于主动力 $\boldsymbol{W}$ 作用线已在摩擦角之外，故物体不能平衡，$\boldsymbol{W}$ 再小也一定下滑。所以斜面倾角 $\alpha\leqslant\varphi_f$ 这一条件，就是物体在斜面上的自锁条件。

在工程中自锁被广泛地应用，如螺旋千斤顶在被举起的重物重量作用下，不会自动下降，拧紧的螺母不会自动松动等。它们的原理都与物体放在斜面上是一样的，即螺纹的升角必须小于摩擦角。

5.5 滚动摩擦的概念

摩擦不仅在物体滑动时存在，当物体滚动时也存在。由实践经验知道，滚动比滑动省力。所以在工程中，为了提高效率，减轻劳动强度，常利用滚动代替滑动。早在殷商时代，我国人民就利用车子作为运输工具。平时常见当搬运重物时，在重物下面垫上管子，就容易推动了，又如机器中多用滚动轴承代替滑动轴承等。其目的都是为了减小摩擦力。

当物体滚动时，存在什么阻力？它有什么特性？下面通过简单的实例来分析这些问题。设水平面上有一轮子，重量为 $\boldsymbol{W}$，半径为 r，在轮子中心 O 上作用一水平力 $\boldsymbol{F}$，如图 5.9 所示。

当力 $\boldsymbol{F}$ 不大时，轮子仍保持静止。分析轮子的受力情况可知，在轮子与平面接触的 A 点有法向反力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$，它与重力 $\boldsymbol{W}$ 等值反向；另外，还有静滑动摩擦力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$，它阻止轮子滑动，与力 $\boldsymbol{F}$ 等值反向。但如果平面的约束反力仅有 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 和 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$，则轮子不能保持平衡，因为静摩擦力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$ 不能阻止轮子滚动，它反而与力 $\boldsymbol{F}$ 组成一力偶，促使轮子滚动。但实际上当力 $\boldsymbol{F}$ 不大时，轮子是平衡的，并没有滚动。这说明支承面除了产生约束反力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 和 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$ 之外，还应产生与力偶($\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$)的力偶矩大小相等而转向相反的反力偶，这个反力偶称为滚动摩擦力偶，用 M_{f} 表示。

图 5.9

滚动摩擦力偶是怎样产生的呢？由于轮子和支承面都并不是刚体，在压力作用下，轮子与支承面在接触处会发生变形，由于变形，轮子与支承面的接触处不再是一个点而是一段弧线。因此，支承面的约束反力不是作用于一点，而是分布于一段弧线上的平面一般力系［图 5.10(a)］。如果以 A 点为简化中心，这些力可以简化为作用于 A 点的一个力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 及一个力偶，即滚动摩擦力偶，其力偶矩为 M_{f}。将 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 分解得 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 和 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$，如图 5.10(b)所示。滚动摩擦力偶矩 M_{f} 随着主动力偶矩的增大而增大，当力 $\boldsymbol{F}$ 增大到某个值时，轮子处于将滚未滚的临界平衡状态，这时，滚动摩擦力偶矩达到最大值，称为最大滚动摩擦力偶矩，用 $M_{\max}$ 表示。若力 $\boldsymbol{F}$ 再增大一点，轮子就会滚动，在滚动过程中，滚动摩擦力偶矩近似等于 $M_{\max}$。

由此可知，滚动摩擦力偶矩 M_{f} 的大小介于零与最大值之间，即

$$0\leqslant M_{\mathrm{f}}\leqslant M_{\max} \tag{5-4}$$

实验证明：最大滚动摩擦力偶矩 $M_{\max}$ 与滚子半径无关，而与支承面的正压力(法向反力)$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 的大小成正比。即

$$M_{\max}=\delta F_{\mathrm{N}} \tag{5-5}$$

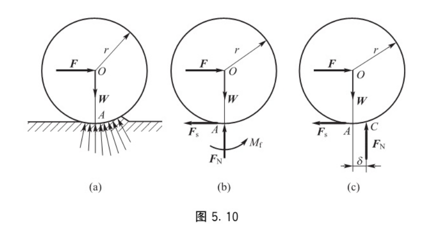


图 5.10

这就是滚动摩擦定律，其中 δ 是比例常数，称为滚动摩擦因数。由上式知，滚动摩擦因数具有长度的量纲，单位一般用 cm。它的值由实验测定，它与滚子和支承面的材料的硬度和湿度等有关，与滚子的半径无关。表 5-2 给出了部分常用材料的滚动摩擦因数。

表 5-2　常用材料的滚动摩擦因数

材料名称	滚动摩擦因数 δ/cm	材料名称	滚动摩擦因数 δ/cm
软钢与软钢	0.005	木材与钢	0.03～0.04
淬过火的钢与淬过火的钢	0.001	木材与木材	0.05～0.08
铸铁与铸铁	0.005		

滚动摩擦因数的物理意义如下。滚子在即将滚动的临界平衡状态时，$M_f=M_{max}$，将作用于 A 点的法向反力 $\boldsymbol{F}_N$ 与最大滚动摩擦力偶矩 M_{max} 合成，如图 5.10(c)所示。使得 F_N 向右平行移过一距离 d，显然，

$$d=\frac{M_{max}}{F_N}=\frac{\delta F_N}{F_N}=\delta$$

故得出：将轮子即将开始滚动时，$\boldsymbol{F}_N$ 从 A 点向滚动方向平行移过的距离即为滚动摩擦因数 δ。

例 5.5　轮子半径为 $r=40$cm，重 $W=2000$N，水平推力为 F，设滑动摩擦因数 $f_s=0.6$，滚动摩擦因数 $\delta=0.24$cm，试求推动此轮前进所需的力 F(图 5.11)。

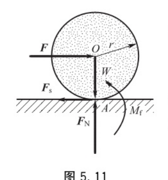


图 5.11

解：(1) 选轮子为研究对象，受力图如图所示，这是一个平面一般力系。

(2) 列平衡方程，求解未知量。

轮子前进有两种可能：第一种是向前滚动，第二种是向前滑动，下面分别进行讨论。先分析向前滚动的情况，轮子刚开始向前滚动时，滚动摩擦力偶矩达到最大值。即

$$M_f=M_{max}=\delta F_N \quad \text{(a)}$$

列平衡方程 $\sum F_x=0$，　$F-F_s=0$，　$F=F_s$　(b)

$$\sum F_y=0,\quad F_N-W=0,\quad F_N=W \quad \text{(c)}$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad M_f-Fr=0,\quad M_f=Fr \tag{d}$$

由式(d)和式(a)得

$$Fr=\delta F_N$$

将式(c)代入上式得

$$F=\frac{\delta}{r}W=\frac{0.24\text{cm}}{40\text{cm}}\times 2000\text{N}=12\text{N}$$

可见只要用12N的力就可以使轮子向前滚动。

再分析滑动的情况，如果轮子刚开始滑动，则静摩擦力 F_s 也达到最大值 F_{max}。即

$$F_s=F_{max}=f_sF_N \tag{e}$$

将式(b)式中的 F_S 和式(c)中的 F_N 代入式(e)得

$$F=f_s\cdot W=0.6\times 2000\text{N}=1200\text{N}$$

这就是说，要使轮子向前滑动，需用1200N的力，显然这是不可能的，因为当推力 F 达到12N时，轮子就已经向前滚动了。

此例说明滚动要比滑动省力得多，通常以滚动代替滑动，就是这个道理。

本 章 小 结

本章讨论了有关摩擦的一些基本理论以及考虑摩擦时平衡问题的分析方法。其中着重分析了静滑动摩擦的情况。同时，还介绍了摩擦角和自锁现象以及滚动摩擦的概念。

1. 静滑动摩擦力的方向与物体相对滑动趋势的方向相反，其大小随着主动力的变化而变化，其变化范围：$0\leqslant F_s\leqslant F_{max}$，具体数值要由平衡条件确定。只有当物体处于临界平衡状态时，静摩擦力 $\boldsymbol{F}_s$ 才达到最大值 F_{max}。

2. 静滑动摩擦定律

$$F_{max}=f_sF_N$$

3. 考虑摩擦时物体平衡问题的解题特点

(1) 画受力图时，受力分析的方法跟以前一样，区别就是多添加一个静摩擦力，其方向与物体相对滑动趋势的方向相反。

(2) 当物体处于临界平衡状态和求未知量的平衡范围时，除了要列平衡方程外，还要列出补充方程。即

$$F_{max}=f_sF_N$$

(3) 因为静摩擦力 $\boldsymbol{F}_s$ 的大小是变化的，所以在问题的答案中也应有一定的范围，而不是一个确定的值。

4. 当静摩擦力 $\boldsymbol{F}_s$ 达到最大值 F_{max} 时，全反力 $\boldsymbol{F}_R$ 与法线间的夹角 φ_f 称为摩擦角，通过摩擦角可以说明自锁现象。在图5.8中，由于全反力 $\boldsymbol{F}_R$ 与法线的夹角不能大于摩擦角，所以作用在物体上除全反力 $\boldsymbol{F}_R$ 以外，全部力的合力的作用线与法线的夹角如小于或等于摩擦角，则不论合力有多大，物体一定平衡，这种现象称为自锁。如果大于摩擦角，则物体必然滑动。

摩擦角 φ_f 为全反力与法线间夹角的最大值。且有摩擦角的正切等于摩擦因数。即 $\tan\varphi_f = f_s$

全反力与法线间夹角 φ 的变化范围为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_f$$

5. 当物体有滚动趋势时，摩擦力是一个力偶，称为滚动摩擦力偶，其力偶矩 M_f 的转向与相对滚动方向相反，大小在零与最大值之间，

$$0 \leqslant M_f \leqslant M_{max}$$

当物体处于滚动的临界平衡状态时，滚动摩擦力偶矩 M_f 达到最大值 M_{max}，其值为

$$M_{max} = \delta \cdot F_N$$

δ 为滚动摩擦因数，一般常以 cm 为单位。

思　考　题

1. 用平胶带和三角胶带传动(图 5.12)，如两种胶带都以相同的压力 $\boldsymbol{F}$ 压向胶带轮，试分析哪一种胶带轮所能产生的摩擦力大，为什么？两胶带和胶带轮的摩擦因数近似地视为相等。

2. 能否说只要受力物体是处于平衡状态，摩擦力的大小一定是 $F_s = f_s \cdot F_N$？为什么？

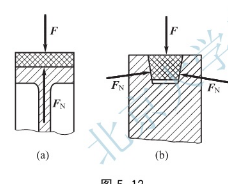


图 5.12

3. 正压力 F_N 是否一定等于物体的重力？为什么？

4. 重为 W_1 的物体置于斜面上(图 5.13)，已知当斜面倾角 α 小于摩擦角 φ_f 时，物体静止于斜面上。如欲使物体下滑，于其上另加一重为 W_2 的物体，并使两重物固结在一起，问能否达到下滑的目的？为什么？

5. 在摩擦定律 $F_{max} = f_s F_N$ 中，F_N 代表什么？在图 5.14 中，重量均为 W 的两物体放在水平面上，摩擦因数也相同，问是拉动省力？还是推动省力？为什么？

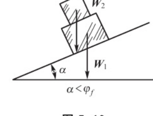


图 5.13

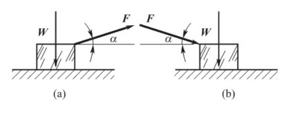


图 5.14

6. 滑动摩擦因数与滚动摩擦因数有何不同？

7. 如果两个粗糙接触面间有正压力作用，能否说该接触面间一定出现摩擦力？

8. 一物体放在倾角为 α 的斜面上，斜面与物体间的摩擦角为 φ_f，若 $\varphi_f > \alpha$，则物体将沿斜面滑动还是静止？

9. 静摩擦因数 f_s，动摩擦因数 f，滚动摩擦因数 δ，这三者有什么意义？又有什么异同？

习 题

5-1 如图 5.15 所示，物体重为 W=100N，与水平面间的摩擦因数 f=0.3，(1)问当水平力 F=10N 时，物体受多大的摩擦力，(2)当 F=30N 时，物体受多大的摩擦力？(3)当 F=50N 时，物体受多大的摩擦力？

5-2 判断图 5.16 中两物体能否平衡？并问这两个物体所受的摩擦力的大小和方向。已知：(1)物体重 W=1000N，拉力 F=200N，f_s=0.3；(2)物体重 W=200N，压力 F=500N，f_s=0.3。

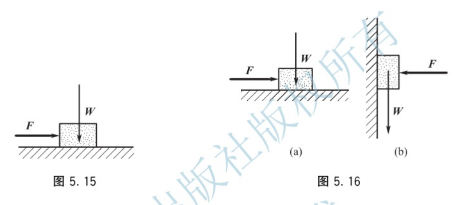


图 5.15　　　图 5.16

5-3 如图 5.17 所示，重为 W 的物体放在倾角为 α 的斜面上，物体与斜面间的摩擦角为 φ_f，且 $\alpha>\varphi_f$。如在物体上作用一力 F，此力与斜面平行。试求能使物体保持平衡的力 F 的最大值和最小值。

5-4 如图 5.18 所示，在轴上作用一力偶，其力偶矩为 M=−1000N·m，有一半径为 r=25cm 的制动轮装在轴上，制动轮与制动块间的摩擦因数 f_s=0.25。试问制动时，制动块对制动轮的压力 F_N 至少应为多大？

5-5 如图 5.19 所示，两物块 A 和 B 重叠放在粗糙的水平面上，在上面的物块 A 的顶上作用一斜向的力 F。已知：A 重 1000N，B 重 2000N，A 与 B 之间的摩擦因数 f_1=0.5，B 与地面 C 之间的摩擦因数 f_2=0.2。问当 F=600N 时，是物块 A 相对物块 B 运动呢？还是 A、B 物块一起相对地面 C 运动？

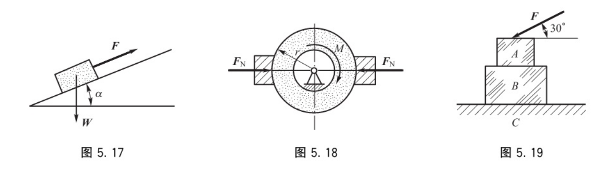


图 5.17　　　图 5.18　　　图 5.19

5-6 如图 5.20 所示，一夹板锤重 500N，靠两滚轮与锤杆间的摩擦力提起。已知摩擦因数 f_s=0.4，试问当锤匀速上升时，每边应加正压力(或法向反力)为多少？

5-7 如图 5.21 所示，一起重用的夹具由 ABC 和 DEF 两相同弯杆组成，并由杆 BE

连接，B 和 E 都是铰链，尺寸如图所示，单位为 mm。此夹具依靠摩擦力提起重物。试问要能提起重物，摩擦因数 f_s 应为多大？

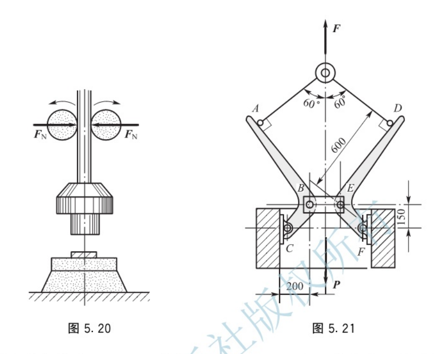


图 5.20　　图 5.21

5－8　砖夹的宽度为 250mm，曲杆 AGB 和 $GCED$ 在 G 点铰接，砖重为 P，提砖的合力 F 作用在砖夹的对称中心线上，尺寸如图 5.22 所示，单位为 mm。如砖夹与砖之间的摩擦因数 $f_s=0.5$，试问 b 应为多大才能把砖夹起（b 为 G 点到砖块上所受压力合力的距离）？

5－9　如图 5.23 所示有一绞车，它的鼓动轮半径 $r=15\text{cm}$，制动轮半径 $R=25\text{cm}$，重物 $P=1000\text{N}$，$a=100\text{cm}$，$b=40\text{cm}$，$c=50\text{cm}$，制动轮与制动块间的摩擦因数 $f_s=0.6$。试问当绞车吊着重物时，要刹住车使重物不致落下，加在杆上的力 F 至少应为多大。

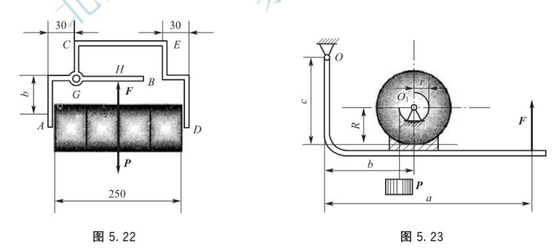


图 5.22　　图 5.23

第6章 空间力系

【教学提示】

本章应用解析法研究空间力系的合成与平衡问题，这种研究方法离不开力在空间坐标轴上的投影和力对轴之矩。然后，利用力的平移定理将空间力系向空间内任一点简化，建立起空间汇交力系。空间平行力系和空间一段力系的平衡方程，最后介绍重心的概念。

【学习要求】

掌握力在空间坐标轴上的投影与力对轴之矩的计算，了解空间力系平衡方程的推导过程并记住方程，了解重心的概念及重心坐标公式的推导过程，记住求重心的分割法。重点是利用平衡方程求解空间一般力系的平衡问题，要加强练习，务必掌握。

6.1 空间力系在工程中的实例

作用在物体上力系的作用线是在空间分布的，这种力系称为空间力系。在工程实际中，会经常遇到物体在空间力系作用下的情况，如图6.1(a)所示的传动轴，A为径向止推轴承，其约束反力有3个，$\boldsymbol{F}_{Ax}$、$\boldsymbol{F}_{Ay}$、$\boldsymbol{F}_{Az}$；B为径向轴承，约束反力有两个$\boldsymbol{F}_{Bx}$、$\boldsymbol{F}_{Bz}$；C为皮带轮，其上有皮带给轮的两个拉力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$；D为斜齿轮，受轴向力$\boldsymbol{F}_a$、径向力$\boldsymbol{F}_r$和圆周力$\boldsymbol{F}_t$的作用，以上作用在传动上的这些力，就组成了空间力系，受力图如图6.1(b)所示。

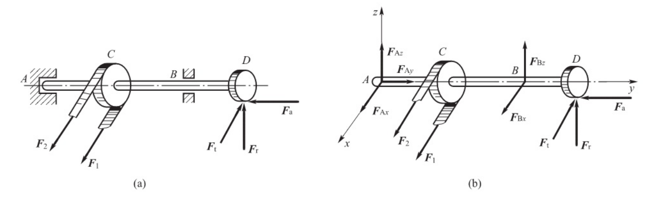


图6.1

空间力系跟平面力系一样，也分空间汇交力系、空间力偶系、空间平行力系和空间一般力系。本章着重研究空间一般力系的平衡问题。

6.2 力在空间坐标轴上的投影

用解析法研究平面力系时，要用到力在平面直角坐标轴上的投影。在研究空间力系时，同样也要用到力在空间直角坐标轴上的投影。如图 6.2(a)所示，已知力 $\boldsymbol{F}$ 与三轴 x、y、z 正向间的夹角分别为 α、β、γ，根据力的投影定义，可直接将力 $\boldsymbol{F}$ 向 3 个坐标轴上投影，这种投影法称为一次投影法。得到

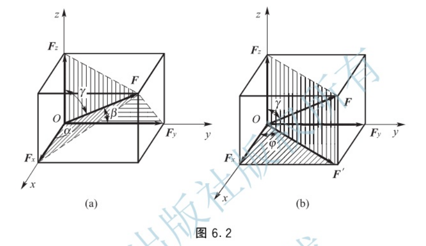


图 6.2

$$\left.\begin{aligned}F_x&=F\cos\alpha\\F_y&=F\cos\beta\\F_z&=F\cos\gamma\end{aligned}\right\}\tag{6-1a}$$

当力 F 与坐标轴 Ox、Oy 间的夹角不易确定时，可把力 $\boldsymbol{F}$ 先投影到坐标平面 Oxy 上，得到力 $\boldsymbol{F}'$，然后再将力 $\boldsymbol{F}'$ 投影到 x、y 轴上。这种投影方法称为二次投影法，如图 6-2(b)所示，得到

$$\left.\begin{aligned}F_x&=F\sin\gamma\cos\varphi\\F_y&=F\sin\gamma\sin\varphi\\F_z&=F\cos\gamma\end{aligned}\right\}\tag{6-1b}$$

具体投影时，用哪种方法要看问题给出的条件来定

反之，如果已知力 $\boldsymbol{F}$ 在三轴 x、y、z 上的投影 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$、$\boldsymbol{F}_z$，也可求出力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向。即

$$\left.\begin{aligned}F&=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\\\cos\alpha&=\frac{F_x}{F}\\\cos\beta&=\frac{F_y}{F}\\\cos\gamma&=\frac{F_z}{F}\end{aligned}\right\}\tag{6-2}$$

6.3 力对轴之矩

6.3.1 力对轴之矩的概念

在前面，我们建立了平面内力对点之矩的概念，如图 6.3(a)所示；力 $\boldsymbol{F}$ 在圆轮平面内，为了度量圆轮在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下绕 O 点转动的效应，建立了在平面内力对点之矩的概念，即

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \pm F \cdot d$$

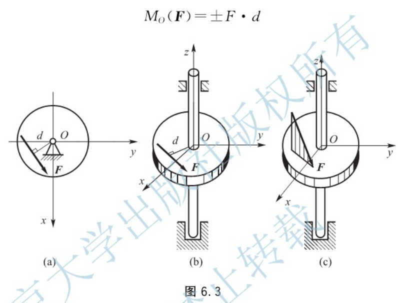


图 6.3

从图 6.3(a)可以看到，平面内力使圆轮绕 O 点的转动，实际上就是空间里力使圆轮绕通过 O 点且与圆轮垂直的轴的转动，即使圆轮绕 z 轴转动［图 6.3(b)］，只不过从不同的角度看而已。所以，平面内力对点之矩，实际上就是空间里力对轴之矩。力 F 对 z 轴之矩用符号 $M_z(\boldsymbol{F})$表示。

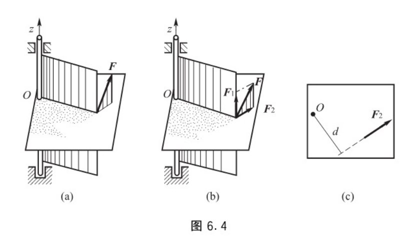


图 6.4

在研究空间力系时，如果力 $\boldsymbol{F}$ 不在垂直于轴的平面内，如图 6.3(c)所示，此种情况下如何求力对轴之矩？下面我们建立空间力对轴之矩的概念。

以开门或关门为例来说明空间的力对轴之矩的求法。设门上作用的力 $\boldsymbol{F}$ 不在垂直于 z 轴的平面内［图 6.4(a)］，现将力 $\boldsymbol{F}$ 分解为两个分力，如图 6.4(b)所示。分力 $\boldsymbol{F}_1$ 平行于 z 轴，使门绕 z 轴没有转动效应，也就是 $\boldsymbol{F}_1$ 对 z 轴的矩等于零。分力 $\boldsymbol{F}_2$ 在垂直于 z 轴的平面内，它对 z 轴的矩实际上就是它对平面与 z 轴的交点 O 之矩。如图 6.4(c)所示，所以

$$M_z(\boldsymbol{F})=M_O(\boldsymbol{F}_2)=\pm F_2 d \tag{6-3}$$

式中正负号表示力对轴之矩的转向。规定：从 z 轴的正向看，逆时针方向转动的力矩为正，顺时针方向转动的力矩为负，如图 6.5(a)所示。或者用右手法则来判定：用右手握住 z 轴，使四个指头顺着力矩转动的方向，如果大拇指指向 z 轴的正向则力矩为正；反之，如果大拇指指向 z 轴的负向则力矩为负，如图 6.5(b)所示。力对轴之矩是一个代数量，其单位与力对点之矩相同。

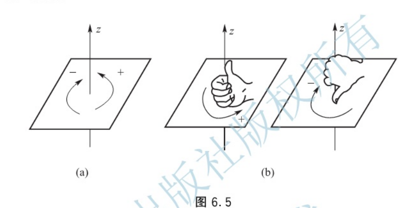


图 6.5

图 6.6

综上所示，可得如下结论：力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴之矩 $M_z(\boldsymbol{F})$ 的大小等于 $\boldsymbol{F}$ 在垂直于 z 轴的平面内的投影 F_2 与力臂 d(即轴与平面的交点 O 到力 $\boldsymbol{F}_2$ 的垂直距离)的乘积，其正负按右手法则确定，或从 z 轴正向看逆时针方向转动时为正，顺时针方向转动时为负。显然，当力 $\boldsymbol{F}$ 平行于 z 轴时，或力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线与 z 轴相交，力 $\boldsymbol{F}$ 对该轴之矩均等于零(图 6.6)。

力对轴之矩是用来度量力使物体绕轴转动效应的物理量。

例 6.1 半径为 r 的斜齿轮，其上作用有力 $\boldsymbol{F}$，如图 6.7(a)所示。求力 $\boldsymbol{F}$ 沿坐标轴的投影及对 y 轴之矩。

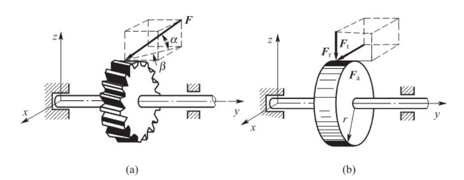


图 6.7

解：先求力 $\boldsymbol{F}$ 在3轴上的投影，如图6.7(b)所示。采用二次投影法

$$F_x = F_t = F\cos\alpha\sin\beta(\text{圆周力})$$
$$F_y = F_a = -F\cos\alpha\cos\beta(\text{轴向力})$$
$$F_z = F_r = -F\sin\alpha(\text{径向力})$$

因为 $\boldsymbol{F}_r$ 通过 y 轴、$\boldsymbol{F}_a$ 与 y 轴平行，所以它们对 y 轴之矩均等于零。只有分力 $\boldsymbol{F}_t$ 对 y 轴有矩，故力 $\boldsymbol{F}$ 对 y 轴之矩为

$$M_y(\boldsymbol{F}) = M_y(\boldsymbol{F}_t) = F \cdot r\cos\alpha\sin\beta$$

6.3.2 合力矩定理

在平面力系中我们讲过合力矩定理，在空间力系中力对轴的矩也有类似关系。下面只叙述结论不作证明，即空间力系的合力对某一轴之矩等于力系中各分力对同一轴力矩的代数和，称为空间力系的合力矩定理。用公式表示为

$$M_x(\boldsymbol{F}_R) = M_x(\boldsymbol{F}_1) + M_x(\boldsymbol{F}_2) + \cdots + M_x(\boldsymbol{F}_n)$$

所以

$$M_x(\boldsymbol{F}_R) = \sum M_x(\boldsymbol{F}) \tag{6-4}$$

空间合力矩定理常被用来确定物体的重心位置，并且也提供了用分力矩来计算合力矩的方法。

6.4 空间力系的平衡方程及应用

空间力系平衡方程的建立与平面力系平衡方程的建立相同，都是通过力系的简化得到的。

设刚体上作用有空间一般力系($\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$)，如图6.8(a)所示。在刚体上任选一点 O 为简化中心，利用力的平移定理，将力系中每个力平移到 O 点，可得一空间汇交力系($\boldsymbol{F}'_1$，$\boldsymbol{F}'_2$，…，$\boldsymbol{F}'_n$)和由所有附加力偶用矢量表示而组成的空间力偶系($\boldsymbol{M}_1$，$\boldsymbol{M}_2$，…，$\boldsymbol{M}_n$)，如图6.8(b)所示。空间汇交力系可合成为一个通过简化中心 O 点的合力 $\boldsymbol{F}'_R$，空间力偶系可合成为一合力偶 $\boldsymbol{M}_O$，如图6.8(c)所示。

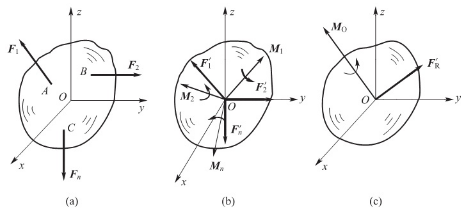


图6.8

空间汇交力系的合力 $\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}$称为原力系的主矢，即

$$F'_R=\sum F'=\sum F$$

设主矢 $\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}$在 3 个坐标轴上的投影分别为 $\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}x}$，$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}y}$，$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}z}$，根据合力投影定理得

$$F'_{\mathrm{R}x}=\sum F_x$$
$$F'_{\mathrm{R}y}=\sum F_y$$
$$F'_{\mathrm{R}z}=\sum F_z$$

由此可得主矢 $\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}$的大小和方向。

$$F'_{\mathrm{R}}=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2+(\sum F_z)^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{\sum F_x}{F'_{\mathrm{R}}},\quad \cos\beta=\frac{\sum F_y}{F'_{\mathrm{R}}},\quad \cos\gamma=\frac{\sum F_z}{F'_{\mathrm{R}}},$$

式中：α、β、γ 分别表示 $\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}$与 x、y、z 轴正向之间的夹角，合力偶 $\boldsymbol{M}_O$ 称为原力系对简化中心的主矩。同样，设主矩在 3 个坐标轴上的投影分别为 $\boldsymbol{M}_{Ox}$、$\boldsymbol{M}_{Oy}$、$\boldsymbol{M}_{Oz}$，根据性质：力对点的矩矢在通过该点的某轴上的投影，等于力对该轴的矩。可得

$$M_{Ox}=\sum M_x(\boldsymbol{F})$$
$$M_{Oy}=\sum M_y(\boldsymbol{F})$$
$$M_{Oz}=\sum M_z(\boldsymbol{F})$$

主矩 M_O 的大小和方向为

$$M_O=\sqrt{[\sum M_x(\boldsymbol{F})]^2+[\sum M_y(\boldsymbol{F})]^2+[\sum M_z(\boldsymbol{F})]^2}$$

$$\cos\alpha'=\frac{M_{Ox}}{M_O},\quad \cos\beta'=\frac{M_{Oy}}{M_O},\quad \cos\gamma'=\frac{M_{Oz}}{M_O}$$

式中：α'、β'、γ'分别表示 $\boldsymbol{M}_O$ 与 x、y、z 轴正向间的夹角。与平面一般力系一样，空间一般力系若要平衡，力系的主矢与主矩也必须同时为零。即

$$F'_{\mathrm{R}}=0,\quad M_O=0$$

故

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0,\quad \sum F_z=0,\\&\sum M_x(\boldsymbol{F})=0,\quad \sum M_y(\boldsymbol{F})=0,\quad \sum M_z(\boldsymbol{F})=0\end{aligned}\right\}\tag{6-5}$$

式(6－5)表示了空间一般力系平衡的必要和充分条件，即各力在 3 个坐标轴上投影的代数和以及各力对此 3 轴力矩的代数和都必须分别等于零。共有 6 个独立的平衡方程，可以求解 6 个未知量，它是解决空间一般力系平衡问题的基本方程。

因为空间汇交力系和空间平行力系都是空间一般力系的特殊情况。所以，我们从空间一般力系的平衡方程中，很容易导出空间汇交力系和空间平行力系的平衡方程。

如图 6.9(a)所示，设物体受一空间汇交力系作用，如把坐标系 $Oxyz$ 的原点建立在力系的汇交点上，则不论该力系是否平衡，各力对 3 轴之矩恒等于零。即

$$\left.\begin{aligned}\sum M_x(\boldsymbol{F})\equiv0\\\sum M_y(\boldsymbol{F})\equiv0\\\sum M_z(\boldsymbol{F})\equiv0\end{aligned}\right\}$$

因此，空间汇交力系的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}\sum F_x=0\\\sum F_y=0\\\sum F_z=0\end{aligned}\right\}\tag{6-6}$$

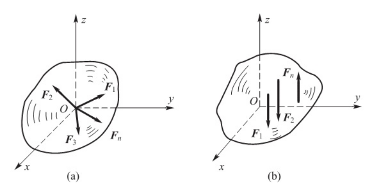


图 6.9

空间汇交力系就是力系中各力的作用线在空间分布，且全汇交于一点。

如图 6.9(b)所示，设物体受一空间平行力系作用。令 z 轴与力系平行，则不论该力系是否平衡，各力对 z 轴的矩与在 x 轴和 y 轴上的投影恒等于零。即

$$\left.\begin{aligned}&\sum M_z(\boldsymbol{F})\equiv 0\\&\sum F_x\equiv 0\\&\sum F_y\equiv 0\end{aligned}\right\}$$

因此，空间平行力系的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_z=0\\&\sum M_x(\boldsymbol{F})=0\\&\sum M_y(\boldsymbol{F})=0\end{aligned}\right\}\qquad(6-7)$$

空间平行力系就是力系中各力的作用线在空间分布，且全相互平行。

下面举例说明空间一般力系平衡方程的应用。

例 6.2 一车床的主轴，如图 6.10(a)所示，齿轮 C 半径为 100mm，卡盘 D 夹住一半

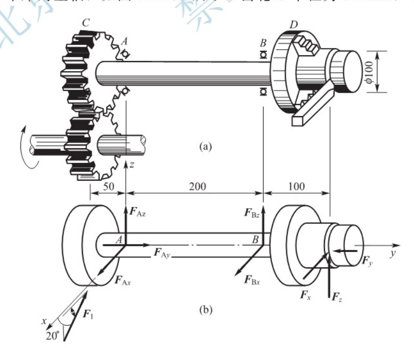


图 6.10

径为50mm的工件，A为向心止推轴承，B为向心轴承。切削时工件匀速转动，车刀给工件的切削力$F_x=466\text{N}$、$F_y=352\text{N}$、$F_z=1400\text{N}$，齿轮C在啮合处受力为$\boldsymbol{F}_1$，作用在齿轮C的最低点。不计主轴及工件的重量，试求力$\boldsymbol{F}_1$的大小及A、B处的约束反力。

解：(1) 选取主轴及工件为研究对象，画受力图，如图6.10(b)所示。向心轴承B的约束反力为$\boldsymbol{F}_{Bx}$和$\boldsymbol{F}_{Bz}$，止推轴承A的约束反力有$\boldsymbol{F}_{Ax}$、$\boldsymbol{F}_{Ay}$、$\boldsymbol{F}_{Az}$，还有未知力$\boldsymbol{F}_1$，主动力$\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$、$\boldsymbol{F}_z$，主轴共受9个力作用，是空间一般力系问题。

(2) 列出空间力系6个平衡方程，求出6个未知量

坐标系如图6.10(b)所示，列方程时最好先列出只含有一个未知量的方程，使得每列一个方程就能解出一个未知量。尽量避免解联立方程，每个方程在题目中只能用一次，先后用的次序没有规定。

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-F_y=0$$

得
$$F_{Ay}=F_y=352\text{N}$$

$$\sum M_y(\boldsymbol{F})=0,\quad -50F_z+100F_1\cos20°=0$$

$$F_1=\frac{50\text{mm}\times1400\text{N}}{100\text{mm}\cos20°}=746\text{N}$$

$$\sum M_z(\boldsymbol{F})=0,\quad -200F_{Bx}+300F_x-50F_y-50F_1\cos20°=0$$

得

$$F_{Bx}=\frac{300\text{mm}\times466\text{N}-50\text{mm}\times352\text{N}-50\text{mm}\times746\text{N}\times\cos20°}{200\text{mm}}$$
$$=437\text{N}$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_{Bx}-F_x-F_1\cos20°=0$$

得
$$F_{Ax}=729\text{N}$$

$$\sum M_x(\boldsymbol{F})=0,\quad 200F_{Bz}+300F_z-50F_1\sin20°=0$$
$$200\text{mm}F_{Bz}+300\text{mm}\times1400\text{N}-50\text{mm}\times746\text{N}\times\sin20°=0$$

得

$$F_{Bz}=-2040\text{N}$$

$$\sum F_z=0,\quad F_{Az}+F_{Bz}+F_z+F_1\sin20°=0$$
$$F_{Az}-2040\text{N}+1400\text{N}+746\text{N}\sin20°=0$$

得

$$F_{Az}=385\text{N}$$

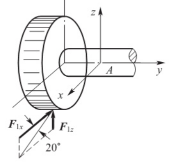


图6.11

本题在列平衡方程过程中，关键是力$\boldsymbol{F}_1$的处理。它并不与轮子相切，而是与轮子的切线有20°的夹角。在轮子所在的平面内，可参阅图6.11。

例6.3 在曲轴上受到垂直于轴颈并与铅垂线成75°角的连杆压力$F=12000\text{N}$，如图6.12(a)所示。不计曲轴重量，试求轴承A和B的约束反力及保持曲轴平衡而需加于飞轮C上的力偶矩M，飞轮重$P=4200\text{N}$。

解：(1) 取曲轴与飞轮为研究对象，画出受力图，如图6.12

(b)所示。这是一个空间一般力系作用下刚体的平衡问题。

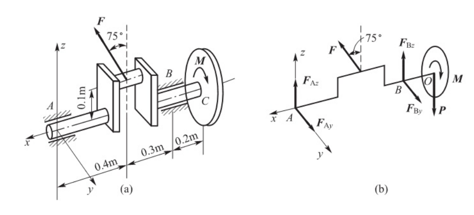


图 6.12

(2) 选坐标系 $Axyz$，列平衡方程求解未知量

$$\sum M_x(\boldsymbol{F})=0;\quad F\sin75°\times0.1\text{m}-M=0$$

得

$$M=F\sin75°\times0.1\text{m}=1160\text{N}\cdot\text{m}$$

$$\sum M_y(\boldsymbol{F})=0;\quad F\cos75°\times0.4\text{m}+F_{\text{Bz}}\times0.7\text{m}-P\times0.9\text{m}=0$$

得

$$F_{\text{Bz}}=3630\text{N}$$

$$\sum M_z(\boldsymbol{F})=0;\quad F\sin75°\times0.4\text{m}-F_{\text{By}}\times0.7\text{m}=0$$

得

$$F_{\text{By}}=F\sin75°\times\frac{0.4\text{m}}{0.7\text{m}}=6620\text{N}$$

$$\sum F_y=0;\quad F_{\text{Ay}}-F\sin75°+F_{\text{By}}=0$$

得

$$F_{\text{Ay}}=F\sin75°-F_{\text{By}}=4970\text{N}$$

$$\sum F_z=0;\quad F_{\text{Az}}+F\cos75°+F_{\text{Bz}}-P=0$$

得

$$F_{\text{Az}}=P-F\cos75°-F_{\text{Bz}}=-2540\text{N}$$

此例中平衡方程$\sum F_x=0$为恒等式 $0\equiv0$，无效。余下 5 个平衡方程解出 5 个未知量。

6.5 重心的概念

有关物体重心问题，不论在日常生活还是在工程实际中都会经常遇到。例如，用独轮小车推重物时，必须把重物放在合适的位置上才感到省力。图 6.13 所示的铁水包。用钩子吊起，以倾倒铁水，为了使它不自由翻转，就要求它无论是空的还是装满铁水时，其重心都要低于转轴，且离得很近。再如图 6.14 所示的塔式吊车，为了保证不倾倒，必须使它无论空载还是满载时，其整体重心位置始终在 A、B 两轮之间。再者土建中的挡土墙、重力坝，等等，都要知道其重心的位置，不然可能会出现坍塌，甚至造成事故。因此我们

要了解什么是重心和怎样确定重心的位置。

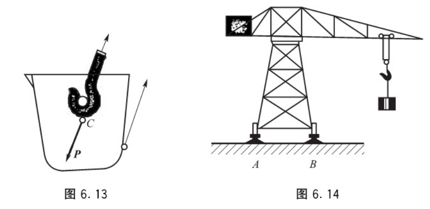


图 6.13　　　　图 6.14

在地球附近的物体都会受到地球对它的引力，把物体可以看成是由无数个微小部分所组成，则每个微小部分都受到地球引力的作用。严格地讲，这些引力组成了一个汇交于地心的空间汇交力系。由于物体的尺寸与地球的半径相比小得多，因此可以近似地认为它是一个同向空间平行力系，此平行力系的合力 $\boldsymbol{W}$，称为物体的重力。通过实验知道，无论物体怎样放置，这些平行力的合力 $\boldsymbol{W}$，总是通过物体内的一个确定点，这个点就是平行力系的中心，又叫做物体的重心。

下面通过平行力系的合力，推导物体重心的坐标公式。

6.6 重心坐标公式

6.6.1 重心坐标的一般公式

在物体上建立空间直角坐标系 $Oxyz$，设物体的重力为 $\boldsymbol{W}$，重心坐标为(x_c, y_c, z_c)，如图 6.15 所示。将物体分成许多微小部分，每个微小部分受到的重力分别为 $\boldsymbol{W}_1$，$\boldsymbol{W}_2$，…，$\boldsymbol{W}_n$，各力作用点的坐标分别为(x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，…，(x_n, y_n, z_n)。$\boldsymbol{W}$ 是各重力 $\boldsymbol{W}_1$，$\boldsymbol{W}_2$，…，$\boldsymbol{W}_n$ 的合力。根据合力矩定理，合力 $\boldsymbol{W}$ 对某轴的矩等于各分力对同一轴力矩的代数和。则对 x 轴之矩有

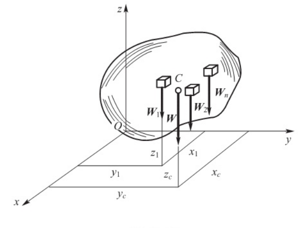


图 6.15

$$-W \cdot y_c = -(W_1 \cdot y_1 + W_2 \cdot y_2 + \cdots + W_n \cdot y_n)$$

可得

$$y_c = \frac{\sum W_i \cdot y_i}{W}$$

同理对 y 轴之矩有

$$W \cdot x_c = W_1 \cdot x_1 + W_2 \cdot x_2 + \cdots + W_n \cdot x_n$$

可得

$$x_c = \frac{\sum W_i \cdot x_i}{W}$$

将物体连同坐标系绕 x 轴转 90°，使 y 轴向上，再应用合力矩定理对 x 轴取矩得

$$W \cdot z_c = W_1 \cdot z_1 + W_2 \cdot z_2 + \cdots + W_n \cdot z_n$$

所以

$$z_c = \frac{\sum W_i \cdot z_i}{W}$$

于是得到重心坐标的一般公式为

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum W_i \cdot x_i}{W} \\ y_c &= \frac{\sum W_i \cdot y_i}{W} \\ z_c &= \frac{\sum W_i \cdot z_i}{W} \end{aligned}\right\} \tag{6-8}$$

在式(6-8)中，如以 $W=Mg$、$W_i=m_i g$ 代入，消去分子和分母中的 g，即得到公式

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum m_i \cdot x_i}{M} \\ y_c &= \frac{\sum m_i \cdot y_i}{M} \\ z_c &= \frac{\sum m_i \cdot z_i}{M} \end{aligned}\right\} \tag{6-9}$$

上式称为物体的质心坐标公式，在重力场内，物体的质心与重心的位置重合，跑出重力场以外，重心不存在，但质心存在。

6.6.2 均质物体的重心坐标公式

均质物体的重量是均匀分布的，如单位体积的重量为 γ，物体体积为 V，每个微小部分的体积为 V_1，V_2，…，V_n，则

$$W = \gamma V$$

物体每个微小部分的重量分别为

$$W_1 = \gamma V_1, \quad W_2 = \gamma V_2, \quad \cdots, \quad W_n = \gamma V_n$$

代入重心坐标式(6-8)中，得到

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum V_i \cdot x_i}{V} \\ y_c &= \frac{\sum V_i \cdot y_i}{V} \\ z_c &= \frac{\sum V_i \cdot z_i}{V} \end{aligned}\right\} \tag{6-10}$$

式(6-10)表明，对均质物体来说，物体的重心只与物体的形状有关，而与物体的重量无关，因此均质物体的重心也称为物体的形心。

6.6.3 均质薄板的重心

对于平面薄板，其重心只求两个坐标就够了，如图 6.16 中的 x_c 和 y_c。设板的厚度为 h，面积为 A，将薄板分成许多微小部分，每个微小部分的面积为 A_1，A_2，…，A_n，则

$$V = hA$$

每个微小部分 $V_1 = hA_1$，$V_2 = hA_2$，…，$V_n = hA_n$ 代入式(6－10)中，得到

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum A_i \cdot x_i}{A} \\ y_c &= \frac{\sum A_i \cdot y_i}{A} \end{aligned}\right\} \qquad (6-11)$$

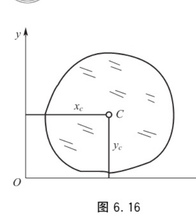


图 6.16

在材料力学中，求平面图形的形心公式，就是用的求均质平面薄板的重心坐标式(6－11)。

6.7 物体重心的求法

在工程实际中，许多物体的几何形状就是一个简单的几何图形，或者是由几个简单几何图形的物体组合而成的组合体。对于简单几何图形物体的重心，可从有关工程手册中查到。表 6－1 列出了常见的几种简单几何图形物体的重心位置，以供求组合物体重心时使用。

表 6－1　简单几何图形物体的面积及其重心

	图形	面(或体)积	重心
长方形		$A = ab$	$x_c = \frac{1}{2}a$ $y_c = \frac{1}{2}b$
三角形		$A = \frac{1}{2}bh$	$x_c = \frac{1}{3}(a+b)$ $y_c = \frac{1}{3}h$
梯形		$A = \frac{h}{2}(a+b)$	$y_c = \frac{1}{3} \cdot \frac{h(2a+b)}{a+b}$ （在上下底中点的连线上）

（续）

	图形	面（或体）积	重心
半圆		$A=\frac{1}{2}\pi r^2$	$x_c=0$ $y_c=\frac{4r}{3\pi}$
扇形		$A=\alpha r^2$	$x_c=0$ $y_c=\frac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$
圆弧		弧长 $S=2\alpha R$	$x_c=0$ $y_c=R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$
长方体		$V=abc$	$x_c=\frac{1}{2}a$ $y_c=\frac{1}{2}b$ $z_c=\frac{1}{2}c$
正圆锥体		$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$x_c=0$ $y_c=0$ $z_c=\frac{1}{4}h$

（续）

	图形	面(或体)积	重心
球面扇形体		$V=\frac{2}{3}\pi r^2 h$	$x_c=0$ $y_c=0$ $z_c=\frac{3}{8}(2r-h)$
正圆柱体		$V=\pi r^2 h$	$x_c=0$ $y_c=0$ $z_c=\frac{1}{2}h$

1. 对称法

在工程实际中，如果均质物体有对称面或对称轴或对称中心，不难看出，该物体的重心必相应的在这个对称面或对称轴或对称中心上。例如图 6.17(a)的工字钢截面，具有对称轴 $O-O'$轴，则它的重心一定在 $O-O'$轴上；又如图 6.17(b)所示，立方体具有对称中心 C，则 C 点就是立方体的重心。

2. 分割法

组合体的形状比较复杂，但它们大多数可以看成是由表 6-1 中给出的简单几何图形的物体组合而成。分割法就是将形状比较复杂的物体分成几个简单部分，这些简单部分的重心位置容易确定，然后，再根据重心坐标公式求出组合体的重心。

例 6.4　Z 形钢的截面，如图 6.18 所示，图中尺寸单位为 mm，求 Z 形截面的重心位置。

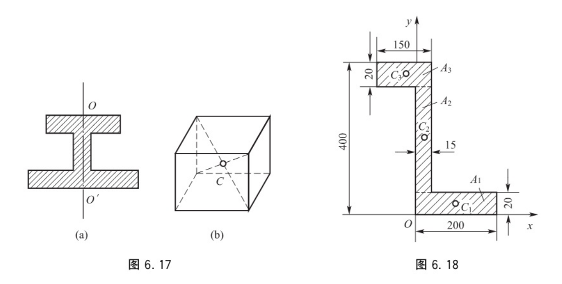


图 6.17　　图 6.18

解：把Z形截面分成3部分，每部分都是矩形。重心分别在对角线的交点上，设坐标系如图6.18所示，每部分的面积及坐标如下

$$A_1=20\text{cm}\times 2\text{cm}=40\text{cm}^2$$

$$x_1=10\text{cm},\quad y_1=1\text{cm}$$

$$A_2=36\text{cm}\times 1.5\text{cm}=54\text{cm}^2$$

$$x_2=0.75\text{cm},\quad y_2=20\text{cm}$$

$$A_3=15\text{cm}\times 2\text{cm}=30\text{cm}^2$$

$$x_3=-6\text{cm},\quad y_3=39\text{cm}$$

将这些数据代入式(6-11)中，得到Z形截面重心坐标为

$$x_c=\frac{\sum x_iA_i}{A}=\frac{10\text{cm}\times 40\text{cm}^2+0.75\text{cm}\times 54\text{cm}^2+(-6\text{cm})\times 30\text{cm}^2}{40\text{cm}^2+54\text{cm}^2+30\text{cm}^2}$$
$$=2.1\text{cm}$$

$$y_c=\frac{\sum y_iA_i}{A}=\frac{1\text{cm}\times 40\text{cm}^2+20\text{cm}\times 54\text{cm}^2+39\text{cm}\times 30\text{cm}^2}{40\text{cm}^2+54\text{cm}^2+30\text{cm}^2}=18.47\text{cm}$$

分割法在材料力学中经常用到。

3. 负面积法

若在物体内挖去一部分，求剩余部分物体的重心时，仍可用分割法，只是挖去部分的面积按负值计算。

例6.5 图6.19为振动器中的偏心块，已知$R=10\text{cm}$，$r=1.3\text{cm}$，$b=1.7\text{cm}$，求偏心块的重心位置。

解：本题属于求平面图形的重心问题，因为有挖去的部分，所以用负面积法计算。

设坐标系Oxy如图，其中Oy轴为对称轴，由对称法知，重心C必在y轴上，所以

$$X_C=0$$

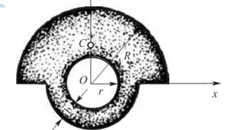


图6.19

将偏心块分成3部分：半径为R的半圆，半径为$(r+b)$的半圆以及半径为r的小圆，最后一部分是挖掉的部分，其面积为负值。这3部分的面积及坐标为

$$A_1=\frac{\pi R^2}{2},\quad y_1=\frac{4R}{3\pi}$$

$$A_2=\frac{\pi(r+b)^2}{2},\quad y_2=-\frac{4(r+b)}{3\pi}$$

$$A_3=-\pi r^2,\quad y_3=0$$

代入式(6-11)，得

$$y_c=\frac{\sum y_iA_i}{A}=\frac{y_1A_1+y_2A_2+y_3A_3}{A_1+A_2+A_3}=\frac{\frac{4R}{3\pi}\times\frac{\pi R^2}{2}-\frac{4(r+b)}{3\pi}\times\frac{\pi(r+b)^2}{2}+0\times(-\pi r^2)}{\frac{\pi R^2}{2}+\frac{\pi(r+b)^2}{2}-\pi r^2}$$

$$=\frac{4(R^3-(r+b)^3)}{3\pi(R^2+(r+b)^2-r^2)}=\frac{4(10^3-3^3)}{3\pi(10^2+3^2-1.3^2)}=3.9\text{cm}$$

偏心块的重心坐标为

$$x_c=0, \quad y_c=3.9\text{cm}$$

这一例题综合运用了对称法、分割法和负面积法确定其重心位置。

4. 实验法

当物体的形状复杂难以分割时，工程中常用实验的方法来测定物体的重心，这种方法比较简便，且具有足够的精确度。

1. 悬挂法

图 6.20 表示用一等厚钢板做成的构件，要确定其形心位置。因构件具有对称面，其重心必在此对称面内，只需确定构件表面的重心，然后构件的重心从表面的重心往里进钢板厚度的一半即可。为此，先任选一点 A 将构件挂起，等构件平衡时顺绳的方向划一条直线 AB，然后再另选一点 D 把构件挂起同理，标出一直线 DE，则两条直线的交点 C 即为构件表面的重心。按上述所说的，再往里进钢板厚度的一半即为构件的重心。

2. 称重法

图 6.21 为发动机中的连杆，因为具有对称轴，所以只要确定重心在此轴上的位置 h 即可。为此，先将连杆放在磅秤上，称出总重量 W，然后将 A 端悬挂不动，连杆放平，B 端放在磅秤上，读出数据 F_B。因连杆处于平衡状态，所以由平衡方程

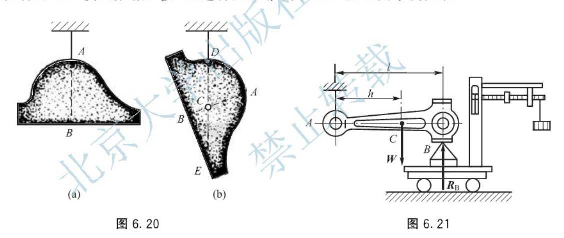


图 6.20　　图 6.21

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0, \quad F_B \cdot l-Wh=0$$

可得

$$h=\frac{F_B \cdot l}{W}$$

求出 h 便知连杆的重心位置。

本 章 小 结

本章研究了空间一般力系的平衡问题，并介绍了确定物体重心位置的方法。

重点是力在空间直角坐标轴上的投影及力对轴之矩的计算。掌握用空间一般力系的平衡方程去解题。

物体重心位置的确定，介绍了几种方法，这些方法可以组合起来运用。但重点是分割

法，后续课程中用到。

1. 力在空间直角坐标轴上的投影

有一次投影法和二次投影法，重点要掌握二次投影法，在具体计算中，究竟选用哪种方法，要根据已知条件来定。

2. 力对轴之矩

力对轴之矩是用来度量力使物体绕轴转动效应的物理量。

力对任一轴之矩，等于力在垂直于该轴平面上的投影对该平面与此轴的交点之矩，其正负按右手法则确定，力对轴之矩是个代数量，当力与轴共面时，力对轴之矩为零。

3. 空间一般力系的平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0,\quad \sum F_z=0,$$
$$\sum M_x(\boldsymbol{F})=0,\quad \sum M_y(\boldsymbol{F})=0,\quad \sum M_z(\boldsymbol{F})=0$$

4. 空间汇交力系的平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0,\quad \sum F_z=0$$

5. 空间平行力系的平衡方程，设 z 轴与力系平行，则

$$\sum F_z=0$$
$$\sum M_x(\boldsymbol{F})=0$$
$$\sum M_y(\boldsymbol{F})=0$$

在求解空间力系的平衡问题时，取研究对象后，先画受力图，后取坐标轴。关键是看清每个力在空间的位置，不要急于下手，要看明白了问题后再做题。列方程时，先列只含一个未知数的方程求解，这样越解未知数越少，剩下的方程也越少，问题也越明朗。

6. 重心是物体的重力所通过的物体内部那个确定的点，根据合力矩定理，建立了重心坐标的一般公式，它是求物体重心的理论基础。

现将静力学部分几种典型约束及约束反力列表如下(表 6-2)。

表 6-2 几种典型约束及其约束反力

约束类型	简图	约束反力
柔性体约束		S 约束反力沿绳索方向，背离物体。
光滑面约束		N N_1 N_2 约束反力沿接触面的公法线方向，指向物体。


（续）

<table>
<tr><th colspan="3">约束类型</th><th>简图</th><th>约束反力</th></tr>
<tr><td colspan="3">辊轴约束</td><td></td><td>约束反力沿接触面的公法线方向，方位已知，指向待定。</td></tr>
<tr><td colspan="3">铰链约束</td><td></td><td>约束反力，用两个分力来表示。</td></tr>
<tr><td colspan="3">固定端约束</td><td></td><td>约束反力可以分解为两个分力和一个约束反力偶。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">轴承</td><td rowspan="2">向心轴承</td><td>平面</td><td></td><td>约束反力沿接触面的公法线方向，指向待定。</td></tr>
<tr><td>空间</td><td></td><td>约束反力沿接触面的公法线方向，用两个分力来表示。</td></tr>
</table>

思 考 题

1. 设有一力 $\boldsymbol{F}$，试问在何种情况下有 $F_x=0$，$M_x(\boldsymbol{F})=0$？在什么情况下有 $F_x=0$，$M_x(\boldsymbol{F})\neq0$？又在何种情况下有 $F_x\neq0$，$M_x(\boldsymbol{F})=0$？

2. 对空间汇交力系，其平衡方程为3个投影式：$\sum F_x=0$，$\sum F_y=0$，$\sum F_z=0$，对于空间平行力系(当力系平行于 z 轴时)，其平衡方程也只有3个，即 $\sum F_z=0$，$\sum M_x(\boldsymbol{F})=0$，$\sum M_y(\boldsymbol{F})=0$，试回答为什么。

3. 如图6.22所示，两球各重 W_1 和 W_2，证明：两球总重的重心 C 位于连心线 O_1O_2 上，并且 C 与球心的距离和球的重量成反比，即 $\dfrac{CO_1}{CO_2}=\dfrac{W_2}{W_1}$。

4. 力 $\boldsymbol{F}$ 作用在长方体的右侧面内，各边尺寸为 a、b、c 和坐标轴 x、y、z 分别如图6.23所示，求该力 $\boldsymbol{F}$ 在3个坐标轴上的投影及对3个坐标轴之矩。

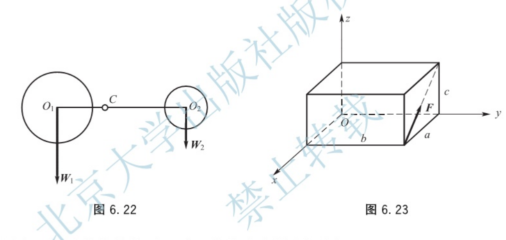


图6.22　　图6.23

5. 用负面积法求物体的重心时，应该注意什么问题？

习 题

6-1 水平圆盘的半径为 r，外缘 c 处作用有已知力 $\boldsymbol{F}$，力 $\boldsymbol{F}$ 位于铅垂平面内，且与 c 处圆盘切线夹角为60°，其他尺寸如图6.24所示。求力 $\boldsymbol{F}$ 对 x、y、z 轴之矩。

6-2 图6.25所示作用于手柄端的力 $F=600\text{N}$，试计算力 $\boldsymbol{F}$ 在 x、y、z 轴上的投影及对 x、y、z 轴之矩(图中尺寸单位：mm)。

6-3 图6.26所示三脚架的3只脚 AD、BD、CD 各与水平面成60°角，且 $AB=BC=AC$，绳索绕过 D 处的滑轮由卷扬机 E 牵引将重物 P 吊起。卷扬机位于 $\angle ACB$ 的等分线上，且 DE 线与水平面成60°角。当 $P=30\text{kN}$ 被匀速地提升时，求各脚所受的力。

6-4 重物 $P=10\text{kN}$，由撑杆 AD 及绳索 BD 和 CD 所支持，杆的 A 端以铰链固定，又 A、B 和 C 3点在同一铅垂墙上。尺寸如图6.27所示，图中尺寸单位为mm，求撑杆 AD 及绳索 BD、CD 所受的力(注：OD 垂直于墙面，$OD=20\text{cm}$)。

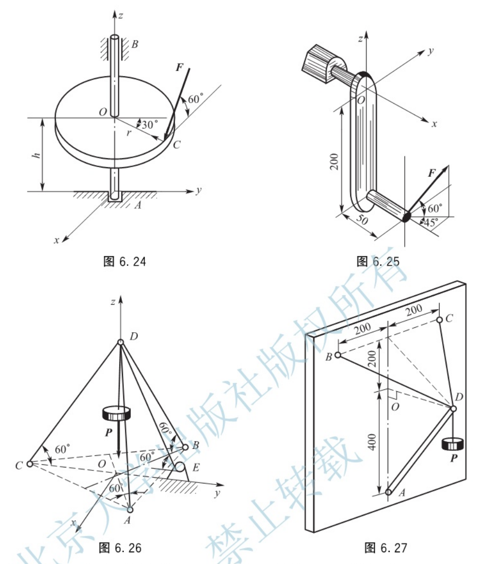


图 6.24　　图 6.25

图 6.26　　图 6.27

6－5　如图 6.28 所示，固结在 AB 轴上的 3 个圆轮，半径各为 r_1、r_2、r_3；水平和铅垂作用力的大小 $F_1=F'_1$、$F_2=F'_2$为已知，求平衡时 F_3 和 F'_3两力的大小。

6－6　图 6.29 所示的三轮小车，自重 $P=8\text{kN}$，作用于点 E，载荷 $P_1=10\text{kN}$，作用于点 C。求小车静止时地面对车轮的反力。

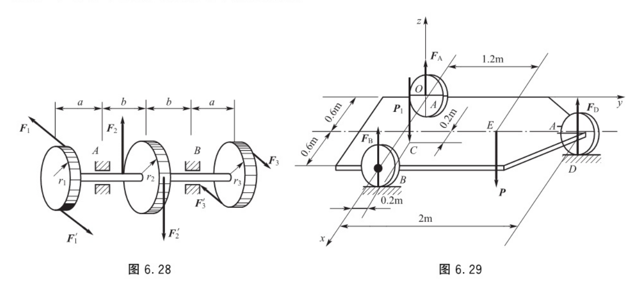


图 6.28　　图 6.29

6-7 有一齿轮传动轴如图 6.30 所示。大齿轮的节圆直径 $D=100$mm，小齿轮的节圆直径 $d=50$mm，如两齿轮都是直齿，压力角均为 $\alpha=20°$，已知作用在大齿轮上的圆周力 $F_2=1950$N，试求传动轴作匀速传动时，小齿轮所受的圆周力 $\boldsymbol{F}_3$ 的大小及两轴承的反力。

6-8 一减速机构如图 6.31 所示。动力由Ⅰ轴输入，通过联轴器在Ⅰ轴上作用一力偶，其矩为 $M=697$N·m，如齿轮节圆直径为 $D_1=160$mm，$D_2=632$mm，$D_3=204$mm，齿轮压力角为 20°，试求Ⅱ轴两端轴承 A、B 的约束反力。图中单位为 mm。

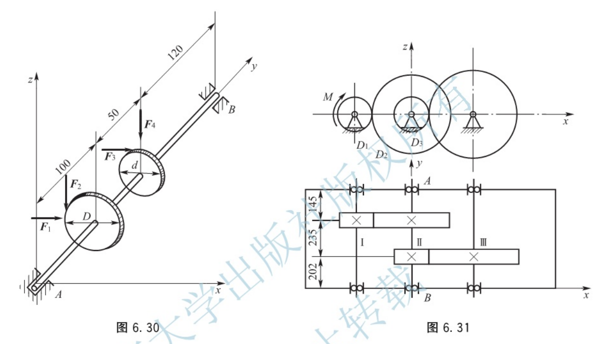


图 6.30　　图 6.31

6-9 传动轴如图 6.32 所示。胶带轮直径 $D=400$mm，胶带拉力 $F_1=2000$N，$F_2=1000$N，胶带拉力与水平线夹角为 15°，圆柱直齿轮的节圆直径 $d=200$mm，齿轮压力 $\boldsymbol{F}$ 与铅垂线成 20°角。试求轴承反力和齿轮压力 $\boldsymbol{F}$。

6-10 求图 6.33 示截面重心的位置。

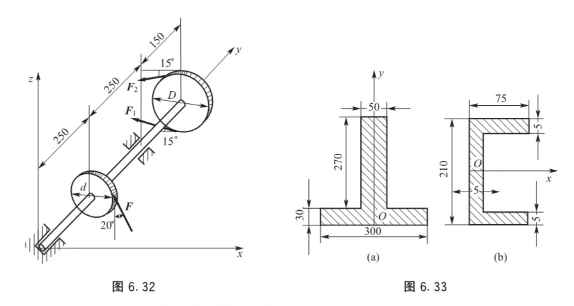


图 6.32　　图 6.33

6-11 斜井提升中，使用的箕斗侧板的几何尺寸，如图 6.34 所示，试求其重心。

6-12 图 6.35 示为一半径 $R=10\text{cm}$ 的均质薄圆板。在距圆心为 $a=4\text{cm}$ 处有一半径为 $r=3\text{cm}$ 的小孔。试计算此薄圆板的重心位置。

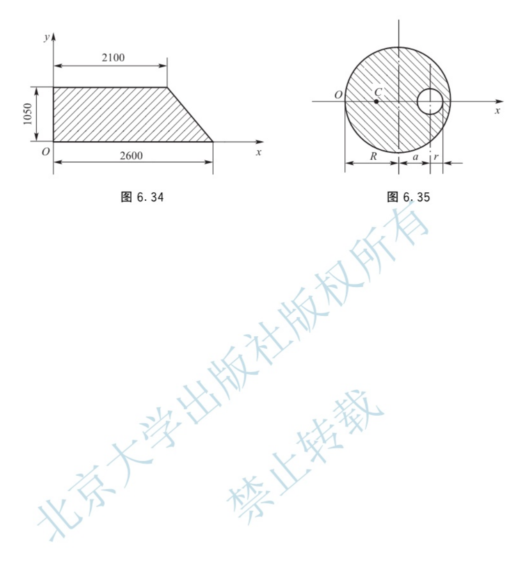


图 6.34

图 6.35

第2篇

材 料 力 学

引　　言

物体受到外力作用后，其内部会引起内力和变形，物体会发生破坏。材料力学主要研究物体受力后发生的变形、由于变形而产生的内力以及物体由此而产生的失效和控制失效的准则，为将来合理地选用构件的材料，确定其截面尺小和形状，提供必要的理论基础与计算方法以及试验技术。即材料力学是研究构件的强度、刚度及稳定性计算原理和方法的科学。材料力学研究的构件主要是杆件，构成杆件的材料是均质、连续、各向同性的可变形固体。材料力学主要研究小变形，变形的基本形式是拉压、剪切、扭转、弯曲。

本篇首先讨论杆件的四种基本变形，然后介绍组合变形、应力状态和压杆稳定。

第7章 绪论和基本概念

【教学提示】

本章首先介绍强度、刚度、稳定性和变形固体的概念，限定材料力学的任务和研究范围。接着介绍内力与应力、位移与应变之间的关系，重点内容是用截面法求解内力。最后简要介绍构件变形的几种基本形式。

【学习要求】

通过本章学习，学生应掌握材料力学的任务、研究范围、研究对象，以及构件的几种基本变形形式，掌握应力、应变的概念，并能够运用截面法求解截面内力。

7.1 材料力学的任务

任何工程结构都是由很多构件组成的，如建筑物的梁和柱等。工程结构在正常工作时，将受到荷载的作用，比如桥梁工程中的主梁，要承受自重、车辆荷载、行人、风、地震等力的作用，这些自重和力统称为作用在构件上的荷载。要想使工程结构正常工作，必须保证组成这个结构的每一个构件在荷载作用下能够安全、正常地工作。因此，每一个构件都要满足以下要求。

1. 强度要求

强度是指材料或者构件抵抗破坏的能力。强度有高低之分，在一定的荷载作用下，有些材料很坚固，不容易被破坏，说明这种材料强度高；而有些材料很容易被破坏，说明这种材料强度低。钢材与木材相比，钢材的强度要高于木材。工程结构在正常工作过程中，任何构件都不允许被损坏，也就是说要有足够的强度，如果强度不足，它在荷载作用下就会被损坏，影响正常使用。

2. 刚度要求

刚度是指构件抵抗变形的能力。任何物体在外力作用下都会产生或大或小的变形，构件产生过大的变形将使其损坏甚至完全丧失所应承担的使用功能。比如厂房结构产生过大的变形，会影响精密仪器的操作精度；桥梁过大的挠度则会影响桥面行车舒适度；吊车梁过大的变形会影响吊车的正常运行和使用期限。因此在荷载作用下，构件产生的变形应不超过工程上允许的范围，这就要求构件具有一定的抵抗变形的能力，这就是刚度。刚度越大的构件，抵抗变形的能力越强，在同样荷载作用下，产生的变形就越小。如材料和长度均相同但粗细不同的两根杆，在相同荷载作用下，细杆比粗杆容易变形，原因就是细杆的刚度比粗杆的刚度小。

3. 稳定性要求

稳定性是指构件维持原有平衡状态的能力，在荷载作用下的平衡应保持为一种稳定的平衡。有些受压力作用的细长杆，如细长的柱或桁架结构中的受压杆，应始终维持原有的直线平衡状态，避免被压弯。如果受压杆突然从原来的直线状态变成弯曲状态，这种现象称为丧失稳定性，简称失稳。

在工程结构中，构件都要具有足够的强度、刚度和稳定性，保证工程结构能够安全工作。同时还要尽可能合理选用材料，降低材料的消耗量，以节约资金和减轻自重。构件的强度、刚度和稳定性问题均与所用材料的力学性能有关，而力学性能需要通过试验来测定。比如材料的抗压强度、抗拉强度、材料的变形与所受外力的关系等。此外，某些经过简化的理论是否可信，也需要由试验来验证。因此试验研究和理论分析同等重要，都是解决材料问题的有效方法。

综上所述，材料力学的研究对象是构件，研究的主要内容是构件的强度、刚度、稳定性和材料的力学性能，研究方法包括理论分析和试验研究。

7.2 关于变形固体的概念

在静力学中，将物体视为不发生变形的刚体，进而讨论其平衡问题。但事实上，自然界中的任何物体在力的作用下都要产生或大或小的变形，这种变形包括物体尺寸的改变和形状的改变，有些还会发生破坏。因此，在材料力学中，不仅要研究物体的受力，还要研究物体受力后的变形和破坏，以保证设计的工程结构能够实现预期的功能和正常工作。要研究固体的变形和破坏，就不能再接受刚体假设，而必须将物体视为变形固体。同时，这种理论假设的改变，也使静力学中的某些公理不能被简单地运用到材料力学中去，在运用的时候既要考虑力的等效，也要考虑变形的等效。

变形固体在外力作用下产生的变形，根据变形性质可分为弹性变形和塑性变形。工程上所用的材料在荷载作用下均会发生变形。当荷载在一定范围以内时，绝大多数材料会在卸除荷载后恢复原状，但当荷载超过一定限度时，在卸除荷载后就不能完全恢复原状了，而是残留一部分变形。把在卸除荷载后能完全恢复的变形称为弹性变形，不能恢复而残留下来的那一部分变形称为塑性变形。任何一种材料，当荷载不超过一定限度的时候，可近似认为其变形是弹性变形，当卸除荷载后，变形全部恢复，如果荷载超过了限度，卸除荷载后就会有残余变形，即塑性变形。多数构件在正常工作条件下，均要求材料只发生弹性变形，因此在材料力学中研究的问题多局限于弹性变形范围内。

工程中的构件在荷载作用下，其变形与构件的原始尺寸相比通常很小，可忽略不计，称这类变形为“小变形”。在这种情况下来研究构件的平衡以及内部受力和变形等问题时，就可以按构件的原始尺寸和形状进行计算。与此相反，有些构件在受力后会产生很大的变形，如果按原始尺寸计算将会产生很大的误差，此时必须按变形后的形状来进行计算，称之为“大变形”问题。材料力学主要研究的是小变形问题，大变形问题仅在压杆稳定一章有所涉及。

7.3 材料力学采用的基本假设

对于可变形固体制成的构件，在进行强度、刚度和稳定性计算时，常把它简化成抽象的力学模型，再进行理论分析。在简化的过程中，通常略去一些次要因素，掌握与问题有关的主要力学性质。因此，在材料力学的研究中，对变形固体做下列基本假设。

1．连续性假设

固体在整个体积内充满了物质，没有空隙，结构密实。实际上，组成固体的粒子之间是有空隙的，并不连续，但这种空隙相对于构件的尺寸来说极其微小，可以忽略不计，进而假设整个固体密实无空隙。根据这一假设，可以在受力构件内的任意一点截取一个微小体积单元来进行研究，从而可以进行无限小量的极限分析。而且，变形后的固体也是保持连续的，没有物质之间的重叠与消失，满足几何相容条件。

2．均匀性假设

从固体内任意一点处取出的单元体，其力学性能都能代表整个固体的力学性能。但是不同的材料对所取的单元体的尺寸有一定的要求，最小尺寸必须保证所取的体积单元所体现的力学性能具有代表性，体积中包含足够多的基本组成部分，使其力学性能的统计平均值能保持一个恒定的量。对于混凝土来说，它的基本组成部分是砂、石、水泥，取 15cm×15cm×15cm 的混凝土立方体作为标准试块，才可以代表同一批混凝土的力学性能，而对于金属来说，取 0.1mm×0.1mm×0.1mm 的立方体就具有足够的代表性了，因为组成金属的晶粒非常微小，在这个小立方体内部已经有足够数量的晶粒，这些晶粒的力学性能的统计平均值，与金属的力学性能足够接近，具有代表性。如果研究的对象不是构件而是组成材料的晶体，那么均匀性假设将不再成立。

3．各向同性假设

认为材料沿着各个方向的力学性能是相同的。对于金属来说，单独一个晶粒的力学性能是有方向性的，但因为体积单元内部包含极多的晶粒，并且是杂乱无章的排列，最终体现出来的力学性能就接近于各向同性了。但是对于像木材这样的材料，它的力学性能具有明显的方向性，就不能认为是各向同性的了，而应按各向异性材料来考虑。

以上为材料力学的 3 个基本假设，通过这样的假设，能够方便地进行理论研究和工程计算，而且它的精度可以满足工程结构的一般要求。

概括起来，材料力学中的“材料”是连续、均匀、各向同性的变形固体，主要解决弹性范围内的小变形问题。研究的对象是构件，大多数抽象为杆件，即纵向尺寸比横向尺寸大得多的构件，如梁、柱等均为杆件。杆件的两个基本几何因素是横截面和轴线，横截面是垂直于长度方向的截面，而轴线是各个横截面形心的连线。

7.4 内力的概念·截面法

构件在受到外力作用而产生变形时，其内部各部分之间因相对位置改变而引起的相互

作用就是内力。由于构件是均匀连续的可变形固体，因此在构件内部相邻部分之间相互作用的内力，实际上是一个在截面上连续分布的内力系，而将其分布内力系的合成(力或力偶)简称为内力，也就是说，内力是由外力引起的，并随着外力的变化而变化。对于单独的一根构件来说，其他构件或物体作用于该构件上的力均为外力。同时，外力也包括温度、超静定结构的支座沉降等外界因素的作用。

各种外力使构件内部产生内力，而内力总是和变形联系在一起。因此，在研究构件的强度、刚度等问题时，均与内力这个因素有关。在结构工程中常常要确定一个构件在具体的外力作用下某一个截面上的内力，然后根据这个内力选择材料，或者配置钢筋，让这个构件满足强度、刚度和稳定性的要求。通常采用下述的截面法来确定某一截面上的内力值。

为了显示内力，首先用一个假想截面法截开物体，显示出作用在该截面上的内力。如图 7.1(a)所示，圆杆受外力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 和力偶 $\boldsymbol{M}$ 作用而处于平衡状态，因此，圆杆的任何一个部分也必然处于平衡状态。如果要研究圆杆内某一截面 C 上的内力，则可沿该截面将圆杆截开，任取一部分研究其平衡。

沿 C 截面将圆杆截为 A、B 两部分，任取一部分 A 作为研究对象，该部分上作用的外力是 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，处于平衡状态。在外力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 作用下，A 部分能保持平衡是因为受到 B 部分的约束，因此在截面 C 上有 B 部分对 A 部分的连续分布内力系的作用，如图 7.1(b)所示。对于 C 截面处的空间任意力系，进行简化合成之后可得到 C 截面的内力，即作用于截面形心处的沿 3 个坐标轴的力($\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$、$\boldsymbol{F}_z$)和绕 3 个轴的力偶($\boldsymbol{M}_x$、$\boldsymbol{M}_y$、$\boldsymbol{M}_z$)，如图 7.1(c)所示。如果外力已知，则 C 截面上内力的 6 个分量，可由空间力系的 6 个独立平衡方程求得。

若取 B 部分作为研究对象，也会得到同样的结果，并且 A 部分 C 截面处的作用力，与 B 部分 C 截面处的作用力是一对相互作用力。

在实际工程结构中，截面上的内力并不一定都是上述的 6 个分量，如果构件有对称面且外力均作用在该平面内，则成为平面问题，如图 7.2(a)所示。用截面法沿 C 截面切开后，任取 A 部分为研究对象，则截面 C 上的内力只有作用在该平面形心处的 3 个分量，即 F_N、F_S、M，其值可由平面力系的 3 个独立平衡方程确定。

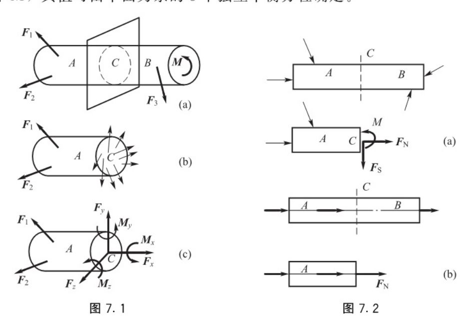


图 7.1　　图 7.2

如果作用在构件上的外力都在同一直线上，并且这条直线就是构件的轴线，如图 7.2(b)所示，则 C 截面上只有一个内力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$。一般随着外力与变形形式的不同，截面上存在的内力分量也不同。

上述用一个假想截面把构件分成两部分，以确定假想截面处的内力的方法称为截面法。可将其归纳为以下 3 个步骤。

(1) 在需要求内力的截面处，用假想截面将构件分成两个部分。

(2) 任取一部分作为研究对象，将舍弃的部分对研究对象的作用以内力的形式来代替。

(3) 根据研究对象的平衡条件，列平衡方程确定内力值。

在求内力的时候，有一点必须要注意，因为材料力学所研究的是变形体，在截取研究对象之前，力和力偶都不可以像研究刚体时那样随意移动。在变形体中，如果一个力系用别的等效力系来代替，虽然对整体平衡没有影响，但对构件的内力和变形来说，却有很大差别。例如图 7.3(a)的所示拉杆，在刚体中力 $\boldsymbol{F}$ 可以沿着作用线移动。但是在变形体中，当 $\boldsymbol{F}$ 作用在杆端时，整个杆件都受拉力作用，杆的各个部分都产生内力和变形。而当 $\boldsymbol{F}$ 作用在杆的中间的时候，如图 7.3(b)所示，则只有力作用点以上部分受拉并产生变形。两者的内力和变形显然不同。再如图 7.4 所示的梁，虽然是等效力系，但是变形大不相同。因此在应用力的等效时，要特别慎重，既要考虑力的等效，也要考虑变形的等效。

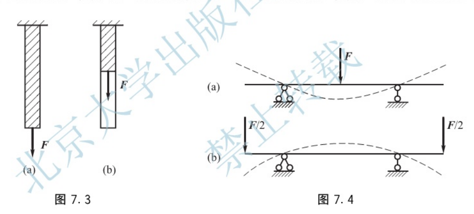


图 7.3　　　　图 7.4

7.5 应力的概念

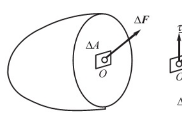
在确定了构件的内力之后，还不能判断构件是否会因强度不足而破坏，即不能判断它的危险程度。比如材料和长度均相同但截面不同的两个等圆截面直杆，在受到同样的轴向拉力作用时的危险程度是不一样的，截面小的会更危险，容易被拉断。因此，要判断杆是否会因强度不足而破坏，还必须知道内力在截面上各点的分布情况。对于某一确定截面，上面处处都有内力的存在，截面内力实际上是连续分布在整个截面上的分布力系，用截面法确定的内力是截面内力的合力。为了考察某一确定截面上的内力分布情况或截面上某一点 O 的内力，可在截面上围绕 O 点取一微小面积 ΔA，若作用在微小面积上的内力为 $\Delta\boldsymbol{F}$，则定义

$$\boldsymbol{p}_m=\frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta A} \tag{7-1}$$

式中 $\boldsymbol{p}_m$ 称为面积 ΔA 上的平均应力，一般说来，截面上的内力分布并不均匀，因而，平均应力 $\boldsymbol{p}_m$ 的大小和方向将随着 ΔA 的大小而变化，为了表明分布力在 O 点的集度，令微小面积 ΔA 无限缩小而趋于零，可得到 O 点的极限值

$$\boldsymbol{p}=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A} \tag{7-2}$$

式中 $\boldsymbol{p}$ 是 O 点的内力集度，称为该截面上 O 点的总应力。总应力 $\boldsymbol{p}$ 是矢量，$\boldsymbol{p}$ 的方向与 $\Delta\boldsymbol{F}$ 的方向一致，其在截面法向上的分量为 σ，称为正应力或法向应力；沿截面切向上的分量为 τ，称为切应力或剪应力，如图 7.5 所示。



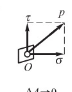


图 7.5

也可以首先把 $\Delta\boldsymbol{F}$ 沿着截面的法向和切向分解为 $\Delta\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 和 $\Delta\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}$，同理有

$$\sigma=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F_{\mathrm{N}}}{\Delta A} \tag{7-3}$$

$$\tau=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F_{\mathrm{S}}}{\Delta A} \tag{7-4}$$

从应力的定义可以看出，应力具有如下特征。

(1) 应力必须限定在某一确定截面上的某一确定点才有意义，因为构件在外力的作用下，可能每一个截面的内力都不相同，而且同一截面上不同点处的应力值也各不相同。所以在讨论应力时，必须明确应力所在截面和所在点的位置。

(2) 应力是矢量，一般将其分解为沿着截面法向的正应力和沿着截面切向的切应力。通常规定离开截面的正应力为正，指向截面的正应力为负，即拉应力为正，压应力为负，使研究对象产生顺时针转动的切应力为正，使研究对象产生逆时针转动的为负，这是对应力正负符号的规定。

(3) 应力的单位是 Pa，名称为“帕斯卡”，或者简称“帕”，$1\mathrm{Pa}=1\mathrm{N/m^2}$。工程结构中通常用 MPa 作为应力单位，$1\mathrm{MPa}=10^6\mathrm{Pa}$。

掌握应力的概念之后，就可以对构件的强度进行验算了，应力越大的点就越危险。内力最大的截面称为危险截面，某截面上应力最大的点称为该截面的危险点，危险截面上的危险点为整个构件的最危险点，如果该点的应力没有超过强度的限值，那么这个构件就不会破坏。通过应力也能够很好地解释为什么材料、长度都相同的两个等圆截面直杆，截面小的更危险。

7.6 位移和应变的概念

刚体在外力作用下，从原位置移动到一个新的位置，刚体内部的各部分均因位置的改变而产生不同的位移，这种位移可以用线位移和角位移来表示。刚体内的某一点从原位置到新位置的连线表示该点的线位移，刚体内的某一线段或某一平面在构件位置改变时转动的角度称为角位移。不同点的线位移以及不同截面的角位移一般都是各不相同的，但它们都是空间坐标的函数。

变形体在外力作用下，不但会产生位移，也会引起受力体形状和大小的变化，这种变化称为变形。这种变化有的非常明显，有的不易察觉，需用仪器进行精确的测量。一个构件(变形体)的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示，因此构件的变形也可以归结为长度的改变和角度的改变，即线变形和角变形两种形式。

在变形体内的某一点 O 处，任取一个微小六面体，它的变形如图 7.6 所示，变形可分为两类。

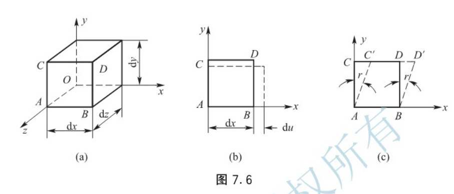


图 7.6

(1) 沿棱边方向的伸长或缩短，如微小六面体图 7.6(a)中沿 x 方向的原长为 $\mathrm{d}x$，变形后变为 $\mathrm{d}x+\mathrm{d}u$，$\mathrm{d}u$ 是沿 x 方向的伸长量或变形量，但仅用 $\mathrm{d}u$ 还不足以说明沿 x 方向的变形程度。比如除长度不同之外其余均相同的两个直杆，长度分别为 10m 和 1m，当它们沿轴线方向共同伸长 0.1m 的时候，对两个直杆来说，其变形程度是不同的，因为变形程度不但与变形量有关，还与变形方向上的原始长度有关，因而取相对伸长 $\Delta u/\Delta x$ 来度量沿 x 方向的变形程度。$\Delta u/\Delta x$ 实际上是在 $\mathrm{d}x$ 范围内单位长度上的平均伸长量，还与 $\mathrm{d}x$ 的长短有关，为了消除尺寸的影响，可对其取极限

$$\varepsilon_x=\lim_{\mathrm{d}u\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{7-5}$$

ε_x 称为 O 点处沿 x 方向的线应变。

(2) 棱边间夹角的改变。如图 7.6(c)中的 AC、AB 边之间的夹角在变形前为直角，变形后该直角减小了 γ，角度的改变量 γ 称为切应变。

构件中不同点处的线应变和切应变一般是不同的，它们也是空间坐标的函数，用来表示一点处的微小变形情况。整个构件形状和尺寸的改变，就是由无数这样的微小变形积累的结果。就像力与变形同时存在一样，应力与应变也同时存在，且其间存在着一定的关系，这在后面的章节中会展开讨论。

7.7 构件变形的基本形式

实际构件有各种不同的形状。材料力学主要研究长度远大于横截面尺寸的构件，也就是杆件。轴线是直线的杆件称为直杆，横截面的大小和形状均不变的直杆称为等直杆。轴线是曲线的杆件称为曲杆，轴线各点处的横截面均垂直于轴线。一般结构工程中的梁、柱均为直杆，拱桥中的拱肋可看作曲杆。

在不同形式的外力作用下，杆件所产生的变形形式也各不相同。杆件变形的基本形式有以下 4 种。

（1）轴向拉伸或压缩。在一对方向相反、作用线与直杆轴线重合的外力作用下，直杆的主要变形是长度的改变，这种变形形式称为轴向拉伸或轴向压缩，如图 7.7(a)、(b)所示。斜拉桥上的斜拉钢索、桁架的杆件等都属于拉伸或压缩变形。

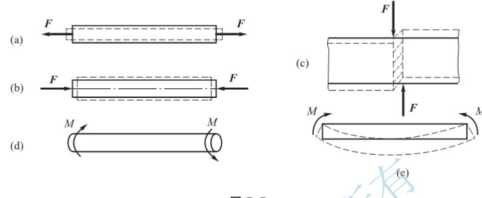


图 7.7

（2）剪切，如图 7.7(c)所示。在一对相距很近的大小相同、指向相反的横向外力 F 的作用下，杆件的横截面将沿外力方向发生错动，这种变形形式称为剪切。键、销钉、螺栓等都能产生剪切变形。

（3）扭转，如图 7.7(d)所示。在一对转向相反、作用面垂直于直杆轴线的外力偶 M 的作用下，直杆的各个相邻截面将绕轴线发生相对转动。钻孔机的钻杆、汽车的传动轴等都是受扭构件。

（4）弯曲，如图 7.7(e)所示。在一个垂直于杆件轴线的横向力作用下或作用于包含杆轴的纵向平面内的一对大小相等、方向相反的力偶作用下，杆件的轴线由直线变为曲线的这种变形形式，叫做弯曲变形。楼房中的承重梁、桥梁中的 T 形梁等都能产生弯曲变形。

工程中常用构件在荷载作用下产生的变形，多为上述 4 种基本变形的组合，完全为一种基本变形的构件较为少见。如果构件以某一基本变形形式为主，而其他变形形式处于次要地位可以忽略，则可以按单一变形形式进行计算。如果几种变形形式都非次要变形，则属于组合变形问题，对这几种变形形式都要加以讨论。

本 章 小 结

1. 保证构件正常工作应满足的要求

强度：在荷载作用下，构件应不发生破坏(断裂或塑性屈服)。

刚度：在荷载作用下，构件所产生的变形应不超过工程允许的范围。

稳定性：在荷载作用下，构件在其原有形态下的平衡应保持为稳定的平衡。

2. 材料力学基本假设

连续性假设：认为材料沿各个方向的力学性能完全相同。

均匀性假设：认为从固体内任一点处取出的体积单元的力学性能完全相同。

各向同性假设：认为材料沿各个方向的力学性能完全相同。

3. 内力、应力、位移、变形与应变的概念

内力：构件在受到外力作用而产生变形时，其内部各部分之间因相对位置改变而引起

的相互作用。

应力：构件某一截面上的某一点处的内力集度，沿截面法向的称为正应力，沿截面切向的称为切应力。

位移：刚体在外力作用下，从原位置移动到一个新的位置，刚体内部各部分这种位置的改变称为位移，可由线位移和角位移来表示。刚体内的某一点从原位置到新位置的连线表示该点的线位移，刚体内的某一线段或某一平面在构件位置改变时转动的角度称为角位移。

变形：变形体在外力作用下产生的形状和大小的变化称为变形，可由线变形和角变形来表示。

应变：任取一个微小六面体，沿棱边方向单位长度上的平均伸长或缩短量称为线应变，棱边间夹角的改变量称为切应变。

4. 截面法

用一个假想截面把构件分成两部分，以确定假想截面处内力的方法称为截面法。可将其归纳为以下 3 个步骤。

(1) 在需要求内力的截面处，用假想截面将构件分成两个部分。

(2) 任取一部分作为研究对象，将舍弃的部分对研究对象的作用以内力的形式来代替。

(3) 根据研究对象的平衡条件，列平衡方程确定内力值。

5. 杆件变形的基本形式

轴向拉伸和压缩：在一对作用线与直杆轴线重合的外力作用下，直杆的主要变形为长度改变。

剪切：在一对相距很近的大小相等、方向相反的横向外力作用下，直杆的主要变形为横截面沿外力作用方向发生相对错动。

扭转：在一对转向相反，作用面垂直于杆轴线的外力偶作用下，直杆的相邻横截面将绕轴线发生相对转动。

纯弯曲：在一对转向相反，作用面在包含杆轴线在内的纵向平面内的外力偶作用下，直杆的相邻横截面将绕垂直于纵向平面的某一横向轴发生相对转动，其轴线将弯曲成曲线。

思 考 题

1. 静力学公理中的哪条不适用于变形固体？
2. 何为各向异性？举例说明各向异性材料的特点。
3. 试计算截面面积为 A 的直杆在轴向拉伸力 F 的作用下，截面上的应力分布情况。

习 题

7-1 试求图 7.8 所示结构 $m-m$ 和 $n-n$ 两截面上的内力，并指出 AB 和 BC 两杆的变形属于哪类基本变形。

7-2 在图 7.9 所示简易吊车的横梁上，F 力可以左右移动。试求截面 1-1 和 2-2

上的内力及其最大值。

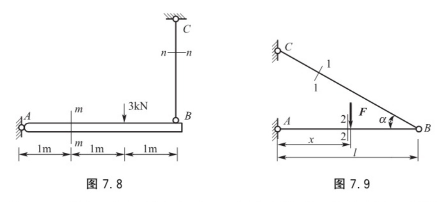


图 7.8　　图 7.9

7-3　如图 7.10 所示，拉伸试样上 A、B 两点的距离 l 称为标距。受拉力作用后，用变形仪量出两点距离的增量为 $\Delta l=5\times10^{-2}$mm。若 l 的原长为 100mm，试求 A 与 B 两点间的平均应变 ε_m。

7-4　图 7.11 所示三角形薄板因受外力作用而变形，角点 B 垂直向上的位移为 0.03mm，但 AB 和 BC 仍保持为直线。试求沿 OB 的平均应变，并求 AB 与 BC 两边在 B 点的角度改变量。

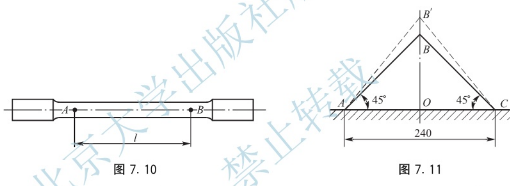


图 7.10　　图 7.11

7-5　图 7.12 所示圆形薄板的半径为 R，变形后 R 的增量为 ΔR。若 $R=80$mm，$\Delta R=3\times10^{-3}$mm，试求沿半径方向和外圆圆周方向的平均应变。

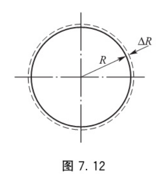


图 7.12

第8章 轴向拉伸和压缩

【教学提示】

本章主要介绍拉压杆的内力、应力、变形以及材料在拉伸与压缩时的力学性能，分析拉压杆的强度问题。

【学习要求】

通过本章的学习，掌握轴向拉压杆件的内力计算，会做轴力图；掌握横截面、斜截面应力分析方法与强度计算；掌握胡克定律及拉压杆的变形计算方法；了解塑性、脆性材料的拉伸与压缩力学性能及测试方法；了解应力集中的概念。

8.1 轴向拉伸、压缩的概念及工程实例

在不同形式的外力作用下，杆件的内力、变形及应变相应的也不同。

承受拉伸或压缩的构件是材料力学中最简单的也是最常见的一种受力构件，它们在工程实际中得到广泛的应用。如图 8.1 所示，简易吊车中的 AB 杆是受轴向拉伸的杆件，AC 杆和图 8.2 所示的曲柄滑块机构中的连杆 AB 都是受轴向压缩的杆件。图 8.3 所示桁架中的各杆不是受拉便是受压，再如在图 8.4 所示的简单起重装置中，钢索受拉，撑杆受压。

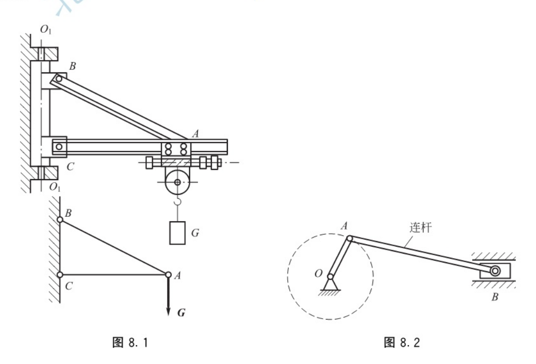


图 8.1　　图 8.2

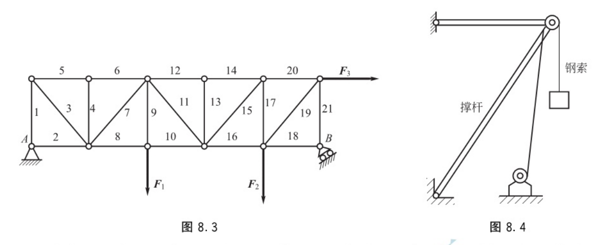


图 8.3　　图 8.4

这些构件均为直杆，其受力特点是：作用于杆件外力的合力作用线与杆件的轴线相重合；变形特点是：杆件沿轴线方向伸长或缩短(图 8.5)，作用线沿杆件轴线的荷载称为轴向荷载。以轴向伸长或缩短为主要特征的变形形式，称为轴向拉压；以轴向拉压为主要变形形式的杆件，称为拉压杆。

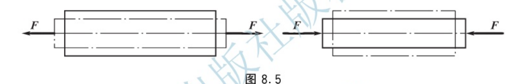


图 8.5

本章将研究拉压杆的内力、应力、变形以及材料在拉伸与压缩时的力学性能，并在此基础上，分析拉压杆的强度与刚度问题，研究对象涉及拉压静定与超静定问题。

8.2 轴力与轴力图

1. 轴力

在轴向载荷 F 作用下［图 8.6(a)］，杆件横截面上的唯一内力分量为轴力 F_N［图 8.6(b)］，轴力或为拉力，或为压力(图 8.7)，为区别起见，通常规定拉力为正，压力为负。按此规定，图 8.6(b)所示轴力为正，其值则为 $F_N=F$

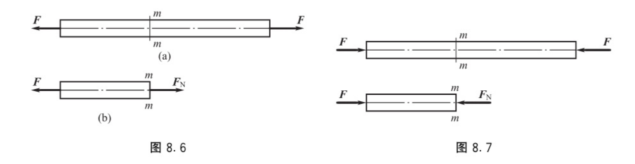


图 8.6　　图 8.7

2. 轴力计算

图 8.8(a)所示拉压杆承受 3 个轴向载荷。由于在横截面 B 处作用有外力，杆件 AB 与

BC 段的轴力将不相同，需分段研究。

利用截面法，在 AB 段内任一横截面 1-1 处将杆切开，并选切开后的左段为研究对象［图 8.8(b)］，由平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad F_{N1}-2F=0$$

得 AB 段的轴力为

$$F_{N1}=2F$$

对于 BC 段，仍用截面法，在任一横截面 2-2 处将其切开，为了计算简单，选切开后的右段为研究对象［图 8.8(c)］，由平衡方程

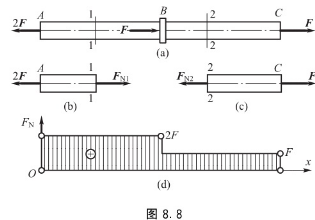


图 8.8

$$\sum F_x=0,\quad F-F_{N2}=0$$

得 BC 段的轴力为

$$F_{N2}=F$$

综上所述，可将计算轴力的方法概述如下。

(1) 在需求轴力的横截面处，假想地将杆切开，并任选切开后的任一杆段为研究对象。

(2) 画所选杆段的受力图，为了计算简便，可将轴力假设为拉力，即采用所谓的设正法。

(3) 建立所选杆段的平衡方程，由已知外力计算切开截面上的未知轴力。

3. 轴力图

如果杆件承受的轴向外力的数目多于两个，在杆的不同区段的轴力一般是不同的。为了直观地反映出杆件各横截面上轴力沿杆长的变化规律，并找出最大轴力及其所在横截面的位置，可以由图线的方式表示轴力的大小与横截面位置的关系，这样的图线称为轴力图。轴力图以平行于杆的轴线的坐标为横坐标，其上各点表示横截面的位置，以垂直于杆轴线的纵坐标表示横截面上轴力的大小，在给定的比例尺下，根据截面法求得的轴力数值，正号轴力画在轴力为正的区域，负号轴力画在轴力为负的区域，即可作出轴力图。例如，图 8.8(a)所示杆的轴力图如图 8.8(d)所示。

例 8.1 一等截面直杆受力情况如图 8.9(a)所示，试作其轴力图。

解： 解此题可以先求出约束力，再求轴的各段轴力，而后画轴力图，也可不求约束力，从轴的右端向左依次求轴的各段轴力，再画轴力图。

(1) 求约束力 F_{NA}。

作杆的受力图，如图 8.9(b)所示，由 $\sum F_x=0$ 得

$$-F_{NA}-F_1+F_2-F_3+F_4=0$$
$$F_{NA}=10\text{kN}$$

(2) 求各段横截面上的轴力。

直接应用截面法计算轴力，一般不必再逐段截开并作隔离体图，计算时取截面左轴段或右轴段均可，一般取外力较少的杆段计算更简便。

AB 段 1-1 截面：分析左侧，$F_{N1}=F_{NA}=10\text{kN}$

BC 段 2－2 截面：分析左侧，$F_{N2}=F_{NA}+F_1=50\text{kN}$

CD 段 3－3 截面：分析右侧，$F_{N3}=F_4-F_3=-5\text{kN}$

DE 段 4－4 截面：分析右侧，$F_{N4}=F_4=20\text{kN}$

由以上计算结果可知，杆件在 CD 段受压，其他各段受拉。

(3) 作轴力图。

最大轴力 $F_{N\max}$ 在 BC 段，其轴力如图 8.9(c)所示。

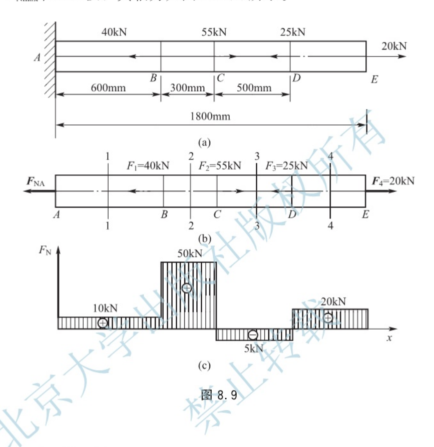


图 8.9

8.3 轴向拉压杆横截面上的应力

现研究拉压杆横截面上的应力分布，即确定横截面上各点处的应力。

首先观察杆的变形，图 8.10(a)所示为一等截面直杆。试验前，在杆表面画两条垂直于杆轴的横线 1－1 与 2－2，然后，在杆两端施加一对大小相等、方向相反的轴向载荷 F。从试验中观察到：横线 1－1 与 2－2 仍为直线，且仍垂直杆件轴线，只是间距增大，分别平移至图中 $1'-1'$ 与 $2'-2'$ 所示的位置。

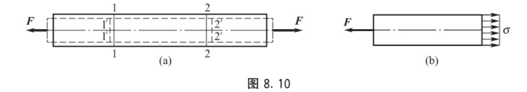


图 8.10

根据上述现象，对杆内变形作如下假设：变形后，横截面仍保持平面，且仍与杆轴垂直，只是横截面间沿杆轴相对平移，此假设称为拉压杆的平面假设。

如果设想杆件是由无数纵向“纤维”所组成的，则由上述假设可知，任意两横截面间的所有纤维的变形均相同，对于均匀性材料，如果变形相向，则受力也相同。由此可见，横截面上各点处仅存在正应力σ，并沿截面均匀分布［图 8.10(b)］。

设杆件横截面的面积为A，轴力为F_N，则根据上述假设可知，横截面上各点处的正应力均为

$$\sigma=\frac{F_N}{A} \tag{8-1}$$

或

$$\sigma=\frac{F}{A}$$

式(8-1)已被试验所证实，适用于横截面为任意形状的等截面拉压杆。

由式(8-1)可知，正应力与轴力具有相同的正负符号，即拉应力为正，压应力为负。

例 8.2 如图 8.11(a)所示，右端固定的阶梯形圆截面杆同时承受轴向荷载$\boldsymbol{F}_1$与$\boldsymbol{F}_2$，试计算杆的轴力与横截面上的正应力。已知载荷$F_1=20\text{kN}$，$F_2=50\text{kN}$，杆件AB段与BC段的直径分别为$d_1=20\text{mm}$与$d_2=30\text{mm}$。

解：(1) 分段计算轴力。

由于在截面B处作用有外力，AB与BC段的轴力将不相同，需分段利用截面法进行计算。

设AB与BC段的轴力均为拉力，并分别用F_{N1}与F_{N2}表示，则由图 8.12(b)与(c)可知

$$F_{N1}=F_1=2.0\times10^4\,\text{N}$$

$$F_{N2}=F_1-F_2=-3.0\times10^4\,\text{N}$$

所得F_{N2}为负，说明BC段轴力的实际方向与所设方向相反，即应为压力，轴力图如图 8.11(d)所示。

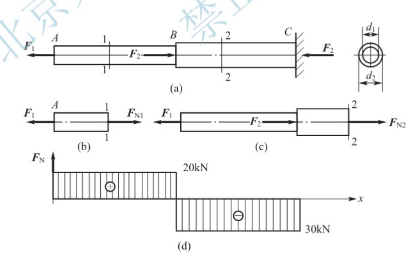


图 8.11

(2) 应力计算。

由式(8-1)可知，AB段内任一横截面 1-1 上的正应力为

$$\sigma=\frac{F_{N1}}{A_1}=\frac{4F_{N1}}{\pi d_1^2}=\frac{4(2.0\times10^4)}{\pi(0.020)^2}=6.37\times10^7\,\text{Pa}=63.7\text{MPa}(拉力)$$

同理，得BC段内任一截面 2-2 上的正应力为

$$\sigma=\frac{F_{N2}}{A_2}=\frac{4F_{N2}}{\pi d_2^2}=\frac{4(-3.0\times10^4)}{\pi(0.030)^2}=-4.24\times10^7\text{Pa}=-42.4\text{MPa}(\text{压力})$$

8.4 轴向拉压杆斜截面上的应力

前面研究了拉压杆横截面上的应力，为了更全面地了解杆内的应力情况，现在研究更为一般的任意方位截面上的应力。

考虑图 8.12(a)所示的拉杆，根据上述结论利用截面法，沿任一斜截面 $m-m$ 上的应力 $\boldsymbol{p}_\alpha$ 也是均匀分布的［图 8.12(b)］，且其方向必与杆轴平行。

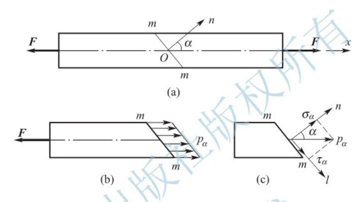


图 8.12

设杆件横截面的面积为 A，则根据上述分析，得杆左段的平衡方程为

$$p_\alpha\frac{A}{\cos\alpha}-F=0$$

由此得 α 截面 $m-m$ 上各点处的应力为

$$p_\alpha=\frac{F\cos\alpha}{A}=\sigma\cos\alpha$$

式中，$\sigma=F/A$，代表杆件横截面上的正应力。

将应力 p_α 沿截面法向与切向分解［图 8.12(c)］，得斜截面上的正应力与切应力分别为

$$\sigma_\alpha=p_\alpha\cos\alpha=\sigma\cos^2\alpha \tag{8-2}$$

$$\tau_\alpha=p_\alpha\sin\alpha=\frac{\sigma}{2}\sin2\alpha \tag{8-3}$$

可见，在拉压杆的任一斜截面上，不仅存在正应力，而且存在切应力，其大小均随截面的方位角变化。

由式(8-2)可知，当 $\alpha=0°$时，正应力最大，其值为

$$\sigma_{max}=\sigma \tag{8-4}$$

即拉压杆的最大正应力发生在横截面上，其值为 σ。

由式(8-3)可知，在 $\alpha=45°$的斜截面上，切应力的值最大，其值为

$$\tau_{max}=\frac{\sigma}{2} \tag{8-5}$$

即拉压杆的最大切应力发生在与杆轴成 45°的斜截面上，其值为 $\sigma/2$。

为了便于应用上述公式，现对方位角与切应力的正负符号作如下规定：以 x 轴为始边，方位角 α 为逆时针转向时为正；将截面外法线 on 沿顺时针方向旋转 90°，与该方向同向的切应力 τ_α 为正。按此规定，图 8.12(c)所示的 σ 与 τ 均为正。

例 8.3 如图 8.13(a)所示，轴向受压等截面杆的截面面积 $A=600\text{mm}^2$，载荷 $F=50\text{kN}$，试求斜截面 $m-m$ 上的正应力与切应力。

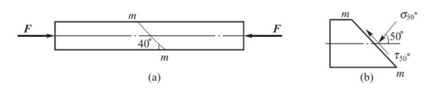


图 8.13

解：杆件横截面上的正应力为

$$\sigma=\frac{F_N}{A}=\frac{-50\times10^3}{600\times10^{-6}}=-83.3\text{MPa}(\text{压力})$$

斜截面 $m-m$ 的方位角为

$$\alpha=50°$$

于是，由式(8-2)和式(8-3)得截面 $m-m$ 上的正应力与切应力分别为

$$\sigma_{50°}=\sigma\cos^2\alpha=(-83.3\times10^6)\cos^2 50°=-34.4\text{MPa}$$

$$\tau_{50°}=\frac{\sigma}{2}\sin2\alpha=\frac{-83.3\times10^6}{2}\sin100°=-41.4\text{MPa}$$

其方向如图 8.13(b)所示。

8.5 拉压杆的变形计算

当杆件承受轴向荷载时，其轴向尺寸与横向尺寸均发生变化(图 8.5)。杆件沿轴线方向的变形称为杆的轴向变形；垂直轴线方向的变形称为杆的横向变形。

1. 拉压杆的轴向变形与胡克定律

轴向拉压试验表明，在比例极限内，正应变与正应力成正比，即

$$\sigma\propto\varepsilon$$

引进比例系数 E，则

$$\sigma=E\varepsilon \tag{8-6}$$

上述关系式称为胡克定律。比例系数 E 称为材料的弹性模量，其值随材料而异，并由试验测定。

由上式可知，弹性模量 E 与应力 σ 具有相同的量纲。弹性模量的常用单位为 GPa(吉帕)，其值为

$$1\text{GPa}=10^9\text{Pa} \tag{8-7}$$

现在，利用胡克定律研究拉压杆的轴向变形。

设原长为 l 的拉杆，在承受一对轴向拉力

图 8.14

F 的作用后，其长度增加为 l_1(图 8.14)，则杆的轴向变形与轴向正应变分别为

$$\Delta l = l_1 - l$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{a}$$

横截面上的正应力为

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F_N}{A} \tag{b}$$

将(a)与(b)带入式 (8-6)，于是得

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA} \tag{8-8}$$

上述关系仍称为胡克定律，适用于等截面常轴力拉压杆。它表明，在比例极限内，拉压杆的轴向变形 Δl_1 与轴力 F_N 及杆长 l 成正比，与乘积 EA 成反比，乘积 EA 称为杆截面的拉压刚度，简称为拉压刚度。显然，对于一给定长度的杆，在一定的轴向荷载作用下，拉压刚度越大，杆的轴向变形越小。由上式可知，轴向变形 Δl 与轴力 F_N 具有相同的正负符号，即伸长为正，缩短为负。

2. 拉压杆的横向变形与泊松比

如图 8.14 所示，设杆件的原宽度为 b，在轴向拉力作用下，杆件宽度变为 b_1，则杆的横向变形与横向正应变分别为

$$\Delta b = b_1 - b$$

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b} \tag{8-9}$$

试验证明，轴向拉伸时，杆沿轴向伸长，其横向尺寸减小，轴向压缩时，杆沿轴向缩短，其横向尺寸增大(图 8.5)，即横向正应变 ε' 与轴向正应变 ε 恒为异号。试验还证明，在比例极限内，横向正应变与轴向正应变成正比。

将横向正应变与轴向正应变之比的绝对值用 μ 表示，则由上述试验可知

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right| = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

或

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon \tag{8-10}$$

比例系数 μ 称为泊松比。在比例极限内，泊松比 μ 是一个常数，其值随材料而异，由试验测定。对于大绝大多数各向同性材料，$0<\mu<0.5$。

将式(8-6)带入式(8-10)，得

$$\varepsilon' = -\frac{\mu\sigma}{E} \tag{8-11}$$

几种常用材料的弹性模量 E 与泊松比 μ 的约值见表 8-1。

表 8-1　材料的弹性模量与泊松比的约值

材料名称	牌号	E/GPa	μ
低碳钢	Q235	200～210	0.24～0.28
中碳钢	45	200～210	

（续）

材料名称	牌号	E/GPa	μ
低合金钢	16Mn	200	0.25～0.30
合金钢	40CrNiMoA	210	
灰铸铁		60～162	0.23～0.27
球墨铸铁		150～180	
铝合金	LY12	71	0.33
硬质合金		380	
混凝土		15.2～36	0.16～0.18
木材（顺纹）		9～12	

例 8.4 一个圆截面杆如图 8.15 所示，已知 $F=4\text{kN}$，$l_1=l_2=100\text{mm}$，弹性模量 $E=200\text{GPa}$。为了保证杆件正常工作，要求其总伸长不超过 0.10mm，即许用变形 $[\Delta l]=0.10\text{mm}$，试确定杆径 d。

图 8.15

解：杆段 AB 与 BC 的轴力分别为

$$F_{N1}=2F$$
$$F_{N2}=F$$

由式(8-8)得其轴向变形为

$$\Delta l_1=\frac{F_{N1}l_1}{EA}=\frac{8Fl_1}{E\pi d^2}$$

$$\Delta l_2=\frac{F_{N2}l_2}{EA}=\frac{4Fl_1}{E\pi d^2}$$

所以，杆 AC 的总伸长为

$$\Delta l=\Delta l_1+\Delta l_2=\frac{8Fl_1}{E\pi d^2}+\frac{4Fl_1}{E\pi d^2}=\frac{12Fl_1}{E\pi d^2}$$

按照设计要求，总伸长 Δl 不得超过许用变形 $[\Delta l]$，即要求

$$\frac{12Fl_1}{E\pi d^2}\leqslant[\Delta l]$$

由此得

$$d\geqslant\sqrt{\frac{12Fl_1}{E\pi[\Delta l]}}=\sqrt{\frac{12(4\times10^3\text{N})(100\times10^{-3}\text{m})}{\pi(200\times10^9\text{Pa})(0.1\times10^{-3}\text{m})}}=8.7\times10^{-3}\text{m}$$

取

$$d=9.0\text{mm}$$

例 8.5 如图 8.16(a)所示桁架，在节点 A 处承受铅垂载荷 F 的作用，试求该节点的位移。已知：杆 1 用钢制成，弹性模量 $E_1=200\text{GPa}$，横截面面积 $A_1=100\text{mm}^2$，杆长

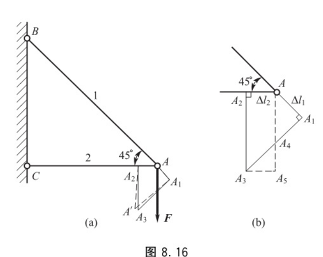


图 8.16

$l_1=1\text{m}$；杆 2 用硬铝制成，弹性模量 $E_2=70\text{GPa}$，横截面面积 $A_2=250\text{mm}^2$，杆长 $l_2=707\text{mm}$；荷载 $F=10\text{kN}$。

解：（1）计算杆件的轴向变形。

首先，根据节点 A 的平衡条件，求得杆 1 与杆 2 的轴力分别为

$$F_{N1}=\sqrt{2}F=\sqrt{2}(10\times10^3\text{N})=1.414\times10^4\text{N}(拉力)$$

$$F_{N2}=F=1.0\times10^4\text{N}(压力)$$

设杆 1 的伸长为 Δl_1，并用 $\overline{AA_1}$ 表示，杆 2 的缩短为 Δl_2，并用 $\overline{AA_2}$ 表示，则由胡克定律可知

$$\Delta l_1=\frac{F_{N1}l_1}{E_1A_1}=\frac{(1.414\times10^4\text{N})(1.0\text{m})}{(200\times10^9\text{Pa})(100\times10^{-6}\text{m}^2)}=7.07\times10^{-4}\text{m}=0.707\text{mm}$$

$$\Delta l_2=\frac{F_{N2}l_2}{E_2A_2}=\frac{(1.0\times10^4\text{N})(1.0\cos45°\text{m})}{(70\times10^9\text{Pa})(250\times10^{-6}\text{m}^2)}=4.04\times10^{-4}\text{m}=0.404\text{mm}$$

（2）确定节点 A 发生位移后的位置。

加载前，杆 1 与杆 2 在节点 A 相连，加载后，各杆的长度虽然改变，但仍连在一起。因此，为了确定节点 A 发生位移后的位置，以 B 与 C 为圆心，并分别以 BA_1 与 CA_2 为半径作圆弧［图 8.16(a)］，其交点 A' 即为节点 A 的新位置。

通常，杆的变形均很小，弧线 A_1A' 与 A_2A' 必很短，因而可近似地用其切线代替。于是，过 A_1 与 A_2 分别作 BA_1 与 CA_2 的垂线［图 8.16(b)］，其交点 A_3 也可视为节点 A 的新位置。

（3）计算节点 A 的位移。

由图 8.16 可知，节点 A 的水平与铅垂位移分别为

$$\Delta_{Ax}=\overline{AA_2}=\Delta l_2=0.404\text{mm}$$

$$\Delta_{Ay}=\overline{AA_4}+\overline{A_4A_5}=\frac{\Delta l_1}{\sin45°}+\frac{\Delta l_2}{\tan45°}=1.404\text{mm}$$

（4）讨论。

与结构原尺寸相比为很小的变形，称为小变形。在小变形的条件下，通常即可按结构原有几何形状与尺寸计算约束反力与内力，并可采用上述以切线代替圆弧的方法确定位移。因此，小变形是一个重要的概念，利用此概念，可使许多问题的分析计算大为简化。

8.6 材料在拉伸与压缩时的力学性质

构件的强度、刚度与稳定性，不仅与构件的形状、尺寸及所受外力有关，而且与材料的力学性能有关，本节将研究材料在拉伸与压缩时的力学性能。

8.6.1 拉伸试验与应力—应变图

材料的力学性能由试验测定，拉伸试验是研究材料力学性能最基本、最常用的试验。

标准拉伸试样如图 8.17 所示，标记 m 与 n 之间的杆段为试验段，其长度 l 称为标距。对于试验段直径为 d 的圆截面试样［图 8.17(a)］，通常规定

$$l=10d \quad 或 \quad l=5d$$

而对于试验段横截面面积为 A 的矩形截面试样［图 8.17(b)］，则规定

$$l=11.3\sqrt{A} \quad 或 \quad l=5.65\sqrt{A}$$

试验时，首先将试样安装在材料试验机的上、下夹头内(图 8.18)，并在标记 m 与 n 处安装测量轴向变形的仪器，然后开动机器，缓慢加载。随着荷载 F 的增大，试样逐渐被拉长，试验段的拉伸变形用 Δl 表示，荷载 F 与变形 Δl 间的关系曲线如图 8.18 所示，称为试样的力—伸长曲线或拉伸图，试验一直进行到试样断裂为止。

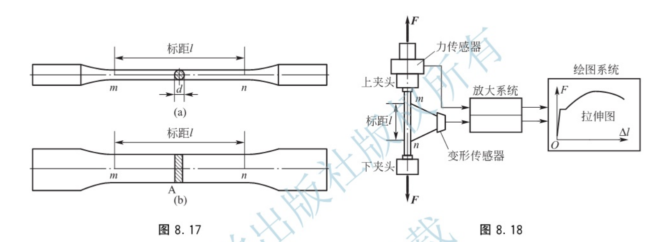


图 8.17　　图 8.18

显然，拉伸图不仅与试样的材料有关，而且与试样的横截面尺寸及标距的大小有关。例如，试验段的横截面面积越大，将其拉断所需的拉力越大；在同一拉力作用下，标距越大，拉伸变形 Δl 也越大。因此，不宜用试样的拉伸图表征材料的力学性能。

将拉伸图的纵坐标 F 除以试样横截面的原面积 A，将其横坐标 Δl 除以试验段的原长 l(即标距)，由此所得应力与应变的关系曲线，称为材料的应力—应变图。

8.6.2 低碳钢的拉伸力学性能

低碳钢是工程中广泛应用的金属材料，其应力—应变图也具有非常典型的意义。图 8.19 所示为低碳钢 Q235 的应力—应变图，现以该曲线为基础，并结合试验过程中所观察到的现象，介绍低碳钢的力学特性。

1. 线性阶段

在拉伸的初始阶段，应力—应变曲线为一直线(图中的 OA)，说明在此阶段内，正应力与正应变成正比，即

$$\sigma \propto \varepsilon$$

线性阶段最高点 A 所对应的正应力称为材料的比例极限，并用 σ_p 表示。低碳钢 Q235 的比例极限 $\sigma_p \approx 200\text{MPa}$。

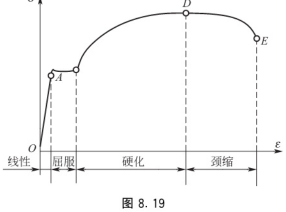


图 8.19

2. 屈服阶段

超过比例极限之后，应力与应变之间不再保持正比关系。当应力增加至某一定值时，应力—应变曲线出现水平线段(可能有微小波动)。在此阶段内，应力几乎不变，而变形却急剧增长，材料失去抵抗继续变形的能力。当应力达到一个定值时，应力虽不增加(或在微小范围内波动)，而变形却急剧增长的现象称为屈服。使材料发生屈服的正应力称为材料的屈服应力或屈服极限，并用 σ_s 表示，低碳钢 Q235 的屈服应力 $\sigma_s \approx 235\text{MPa}$。如果试样表面光滑，则当材料屈服时，试样表面将出现与轴线约成 45°的线纹(图 8.20)。如前所述，在杆件 45°斜截面上作用有最大切应力，因此，上述线纹可能是材料沿该截面产生滑移所造成的。材料屈服时试样表面出现的线纹通常称为滑移线。

3. 硬化阶段

经过屈服阶段之后，材料又增强了抵抗变形的能力，这时，要使材料继续变形需要增大应力。经过屈服滑移之后，材料重新呈现抵抗继续变形的能力称为应变硬化。硬化阶段的最高点 D 所对应的正应力称为材料的强度极限，并用 σ_b 表示，低碳钢 Q235 的强度极限 $\sigma_b \approx 380\text{MPa}$。强度极限是材料所能承受的最大应力。

4. 颈缩阶段

当应力增长至最大值 σ_b 之后，试样的某一局部显著收缩(图 8.21)，产生所谓的颈缩。颈缩出现后，使试件继续变形所需的拉力减小，应力—应变曲线相应呈现下降趋势，最后导致试样在颈缩处断裂。

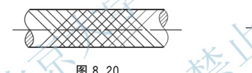


图 8.20　　　　图 8.21

综上所述，在整个拉伸过程中，材料经历了线性、屈服、硬化与颈缩 4 个阶段并存在 3 个特征点，相应的应力依次为比例极限、屈服应力与强度极限。

5. 卸载与再加载规律

试验表明，如果当应力小于比例极限时停止加载，并将载荷逐渐减小至零，即卸去载荷，则可以看到，在卸载过程中应力与应变之间仍保持正比关系，并沿直线 AO 回到 O 点(图 8.22)，变形完全消失。这种仅产生弹性变形的现象，一直持续到应力—应变曲线的某点 B，与该点对应的正应力称为材料的弹性极限，并用 σ_e 表示。

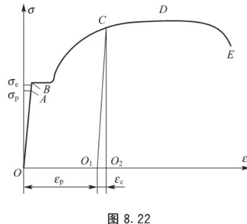


图 8.22

在超过弹性极限之后，例如在硬化阶段某一点 C 逐渐减小载荷，则卸载过程中的应力—应变曲线如图 8.22 中的 CO_1 所示，该直线与 OA 几乎平行。线段 $\overline{O_1O_2}$ 则代表随卸载而消失的应变，即弹性应变；而线段 $\overline{OO_1}$ 则代表应力减小至零时残留的应变，即塑性应变或残余应变。由此可见，当应力超过弹性极限后，材料的应变包括弹性应变

与塑性应变，但在卸载过程中，应力与应变之间仍保持线性关系。

在试验中还发现，如果卸载至 O_1 点后立即重新加载，则加载时的应力、应变关系基本上沿卸载时的直线 O_1C 变化，过 C 点后仍沿原曲线 CDE 变化，并至 E 点断裂。因此，如果将卸载后已有塑性变形的试样当成新试样重新进行拉伸试验，其比例极限或弹性极限将得到提高，而断裂时的残余变形则将减小。由于预加塑性变形而使材料的比例极限或弹性极限提高的现象，称为冷作硬化。工程中常利用冷作硬化来提高某些构件(如钢筋与链条等)在弹性范围内的承载能力。

6. 材料的塑性

试样断裂时的残余变形最大。材料能经受较大塑性变形而不破坏的能力称为材料的塑性或延性。材料的塑性用延伸率或断面收缩率度量。

设断裂时试验段的残余变形为 Δl_0，则残余变形 Δl_0 与试验段原长 l 的比值，即

$$\delta=\frac{\Delta l_0}{l}\times 100\% \tag{8-12}$$

称为材料的延伸率，如果试验段横截面的原面积为 A，断裂后断口的横截面面积为 A_1，所谓断面收缩率即为

$$\psi=\frac{A-A_1}{A}\times 100\% \tag{8-13}$$

低碳钢 Q235 的延伸率为 $\delta\approx 25\%\sim 30\%$，断面收缩率为 $\psi\approx 60\%$。

塑性好的材料，在轧制或冷压成型时不易断裂，并能承受较大的冲击载荷。在工程中，通常将延伸率较大(如 $\delta>5\%$)的材料称为塑性或延性材料，延伸率较小的材料称为脆性材料。结构钢与硬铝等为塑性材料，而工具钢、灰口铸铁与陶瓷等则属于脆性材料。

8.6.3 其他材料的拉伸力学性能

图 8.23 所示为 16 锰钢与硬铝等金属材料的应力—应变图，从中可以看出，它们断裂时均具有较大的残余变形，即均属于塑性材料。不同的是，有些材料不存在明显的屈服阶段。对于不存在明显屈服阶段的塑性材料，工程中通常以卸载后产生数值为 0.2%的残余应变的应力作为屈服应力，称为屈服强度或名义屈服极限，并用 $\sigma_{0.2}$ 表示，如图 8.24 所示。

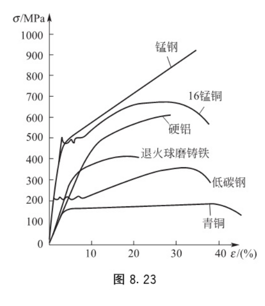


图 8.23

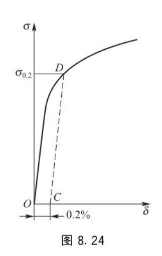


图 8.24

至于脆性材料，如灰口铸铁与陶瓷等，从开始受力直至断裂，变形始终很小，既不存在屈服阶段，也无颈缩现象。图 8.25 所示为灰口铸铁拉伸时的应力—应变曲线，断裂时的应变仅为 0.4%～0.5%，断口则垂直于试样轴线，即断裂发生在最大拉应力作用面。

近年来，复合材料得到广泛应用。复合材料具有强度高、刚度大与比重小的特点。碳/环氧(即碳纤维增强环氧树脂基体)是一种常用的复合材料，图 8.26 所示为某种碳/环氧复合材料沿纤维方向与垂直于纤维方向的拉伸应力—应变曲线。可以看出，材料的力学性能随加力方向变化，即为各向异性，而且断裂时残余变形很小，其他复合材料也具有类似的特点。

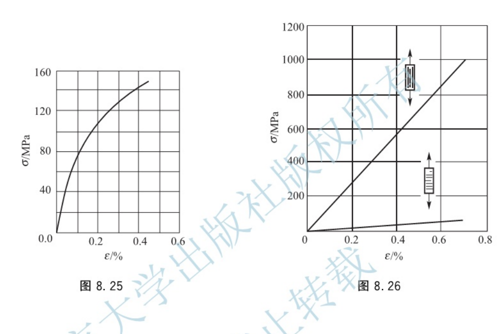
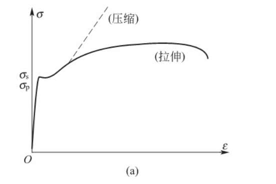


图 8.25　　图 8.26

8.6.4　材料在压缩时的力学性能

材料受压时的力学性能由压缩试验测定，一般细长杆被压缩时容易产生失稳现象，因此在金属压缩试验中，常采用短粗圆柱形试样。

低碳钢压缩时的应力—应变曲线如图 8.27(a)中的虚线所示，为了便于比较，图中还画出了拉伸时的应力—应变曲线。可以看出，在屈服之前，压缩曲线与拉伸曲线基本重合，压缩与拉伸时的屈服应力与弹性模量大致相同。不同的是，随着压力不断增大，低碳钢试样将越压越“扁平”[图 8.27(b)]。



(b)

图 8.27

灰口铸铁压缩时的应力—应变曲线如图 8.28(a)所示，压缩强度极限远高于拉伸强度极限(约为 3～4 倍)，其他脆性材料如混凝土与石料等也具有上述特点，所以，脆性材料宜用做承压构件。灰口铸铁压缩破坏的形式如图 8.28(b)所示，断口的方位角约为 55°～60°。由于在该截面上存在较大的切应力，所以灰铸铁压缩破坏的方式是剪断。

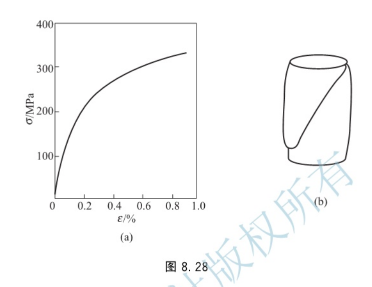


图 8.28

8.7 强度计算、许用应力和安全因数

前面介绍了杆件在拉伸或压缩时最大应力的计算以及材料的力学性能，在此基础上，本节将研究拉压杆的静强度问题。

1. 安全因数 许用应力

材料丧失正常工作能力(失效)时的应力称为极限应力，用 σ_u 表示。对于塑性材料，当应力达到屈服点 σ_s 时，将发生显著的塑性变形，此时虽未发生破坏，但因变形过大将影响构件的正常工作，所以把 σ_u 定义为极限应力，即 $\sigma_u=\sigma_s$。对于脆性材料，因塑性变形很小，断裂就是破坏的标志，故以强度极限作为极限应力，即 $\sigma_u=\sigma_b$。

为了保证构件有足够的强度，它在外载荷作用下引起的应力(称为工作应力)的最大值应小于极限应力，原因如下。

(1) 作用在构件上的外力难以精确计算，并常有一些突发性的载荷。

(2) 经简化而成的计算(力学)模型与实际结构总有偏差(当然越小越好)，因此，计算所得应力(即工作应力)通常带有一定程度的近似性。

(3) 实际材料的组成与品质等难免存在差异，不能保证构件所用材料与标准试样具有完全相同的力学性能。

所有这些不确定因素，都有可能使构件的实际安全工作条件比设计的要严密。

除了以上原因外，为了确保安全，构件还应具有适当的强度储备，特别是对于因破坏将带来严重后果的结构，如桥梁、水坝及大型起重设备等，更应给予较大的强度储备。

对于由一定材料制成的具体构件，工作应力的最大允许值称为材料的许用应力(许可应力)，用 [σ] 表示。许用应力与极限应力的关系为

$$[\sigma]=\frac{\sigma_u}{n} \tag{8-14}$$

其中，n 为大于 1 的因数，称为安全因数(安全系数)。

如上所述，安全因数是由多种因素决定的。各种材料在不同工作条件下的安全因数或许用应力，可从有关规范或设计手册中查到。在一般静强度计算中，对于塑性材料，按屈服应力所规定的安全因数 n_s 通常取 1.5～2.2；对于脆性材料，按强度极限所规定的安全因数 n_b 通常取 3.0～5.0，甚至更大。当然，安全因数也并不是越大越好，过大的安全因数会耗用过多的材料，使结构的自重上升，制造成本增大。

2. 强度条件

许用应力确定之后，就可以建立杆件的强度条件

$$\sigma_{max}=\left(\frac{F_N}{A}\right)_{max}\leqslant[\sigma] \tag{8-15}$$

即杆件的最大工作应力不得超过许用应力。对于等截面杆，上式可写成

$$\sigma_{max}=\left(\frac{F_{Nmax}}{A}\right)_{max}\leqslant[\sigma] \tag{8-16}$$

根据上述强度条件，可以解决下列 3 类强度计算问题。

(1) 强度校核。已知载荷、截面尺寸及材料的许用应力，根据式(8-16)校核杆件是否满足强度要求。

(2) 设计截面尺寸。已知载荷及材料的许用应力，确定杆件所需的最小横截面面积。由式(8-16)可得

$$A\geqslant\frac{F_{Nmax}}{[\sigma]} \tag{8-17}$$

(3) 确定许用载荷。已知杆件的横截面面积及材料的许用应力，确定允许的最大荷载。对于二力杆，由式(8-16)确定最大轴向外力

$$F_{max}=F_{Nmax}\leqslant[\sigma]A=[F] \tag{8-18}$$

如果最大工作应力 σ_{max} 超过了许用应力 $[\sigma]$，但只要超过量在 5%以内，在工程设计中仍然是允许的。

例 8.6 如图 8.29 所示，空心圆截面杆的外径 $D=20\text{mm}$，内径 $d=15\text{mm}$，承受轴向荷载 $F=20\text{kN}$ 的作用，材料的屈服应力 $\sigma_s=235\text{MPa}$，安全系数 $n_s=1.5$，试校核杆的强度。

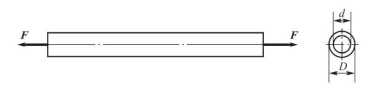


图 8.29

解：杆件横截面上的正应力为

$$\sigma=\frac{4F}{\pi(D^2-d^2)}=\frac{4(20\times10^3\text{N})}{\pi[(0.020\text{m}^2)-(0.015\text{m}^2)]}$$
$$=1.455\times10^8\text{Pa}=145.5\text{MPa}$$

根据式(8－14)可知，材料的许用应力为

$$[\sigma]=\frac{\sigma_s}{n_s}=\frac{235\times10^6\text{Pa}}{1.5}=1.56\times10^8\text{Pa}=156\text{MPa}$$

可见，工作应力小于许用应力，说明杆件能够安全工作。

例 8.7 图 8.30 为油缸的示意图。缸盖与缸体用 6 个螺栓相连接。已知油缸内径 $D=350\text{mm}$，油压 $p=1\text{MPa}$。若螺栓材料的许用应力为 $[\sigma]=40\text{MPa}$，试求螺栓的小径。

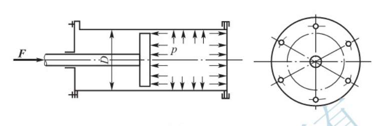


图 8.30

解：缸盖上承受的总压力是

$$F=\frac{1}{4}\pi D^2p=\frac{1}{4}\pi(350\times10^{-3}\text{m})^2\times1\times10^6\text{Pa}=96.2\times10^3\text{N}$$

这也就是 6 个螺栓承担的总拉力，即每个螺栓承受的轴力为 $F_N=\frac{F}{6}$。若螺栓的小径为 d，横截面面积为 $A=\frac{\pi}{4}d^2$，于是由强度条件式(8－16)得

$$\frac{\pi}{4}d^2\geqslant\frac{F_N}{[\sigma]}$$

由此解出

$$d\geqslant\sqrt{\frac{4F_N}{\pi[\sigma]}}=\sqrt{\frac{4\times96.2\times10^3\text{N}}{6\times\pi\times40\times10^6\text{Pa}}}=0.0226\text{m}=22.6\text{mm}$$

可取 $d=23\text{mm}$。

例 8.8 如图 8.31 所示，桁架由杆 1 与杆 2 组成，在节点 B 承受荷载 F 作用，试计算荷载 F 的最大许用荷载 $[F]$。已知杆 1 与杆 2 的横截面面积均为 $A=100\text{mm}^2$，许用拉应力为 $[\sigma_t]=200\text{MPa}$，许用压应力为 $[\sigma_c]=150\text{MPa}$。

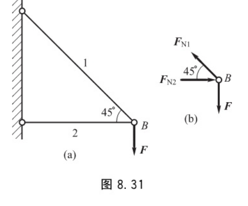


图 8.31

解：(1) 轴力分析。

设杆 1 轴向受拉，杆 2 轴向受压，杆 1 与杆 2 的轴力分别为 F_{N1} 与 F_{N2} [图 8.31(a)]，则根据节点 B 的平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad F_{N2}-F_{N1}\cos45°=0$$
$$\sum F_y=0,\quad F_{N1}\sin45°-F=0$$

得

$$F_{N1}=\sqrt{2}F(\text{拉力})$$

$$F_{N2}=F(\text{压力})$$

(2) 确定 F 的许用值。

杆 1 的强度条件为

$$\frac{\sqrt{2}F}{A} \leqslant [\sigma_t]$$

由此得

$$F \leqslant \frac{A[\sigma_t]}{\sqrt{2}} = \frac{(100 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2)(200 \times 10^6\,\mathrm{Pa})}{\sqrt{2}} = 1.414 \times 10^4\,\mathrm{N}$$

杆 2 的强度条件为

$$\frac{F}{A} \leqslant [\sigma_c]$$

由此得

$$F \leqslant A[\sigma_c] = (100 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2)(150 \times 10^6\,\mathrm{Pa}) = 1.50 \times 10^4\,\mathrm{N}$$

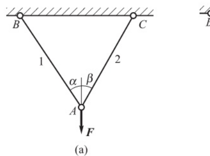
可见，桁架所能承受的最大荷载即许用荷载为

$$[F] = 14.14\,\mathrm{kN}$$

8.8 拉伸和压缩超静定问题

1. 静定与超静定问题

在前面所讨论的问题中，未知力(支座反力或内力)的数目小于或等于静力学平衡方程式的数目，此时，未知力可由静力学平衡方程确定，这类问题称为静定问题。图 8.32(a) 所示的桁架即属于静定问题。但在工程上有时为了提高结构的强度和刚度，往往需要增加一些约束或杆件，因此有一些结构的未知力数目大于静力学平衡方程的数目，此时如果只根据静力学平衡方程将不能求解全部的未知力，这类问题称为超静定问题或静不定问题，这样的结构称为超静定结构或静不定结构［图 8.32(b)］。由此可见，在超静定问题中，存在着多于维持静力平衡所必需的支座或杆件，通常称之为“多余”约束，相应的支座反力或内力则称为多余未知力，由于多余约束的存在，未知力的数目必然多于静力平衡方程的数目，两者的差值称为超静定的次数。



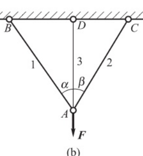


图 8.32

2. 超静定问题分析

解决超静定问题，除了要根据静力平衡条件建立静力平衡方程外，还需要建立补充方程。要分析结构各部分间的变形协调条件，由此得到各部分之间的几何关系，再根据变形

与轴力间的物理关系——胡克定律，就可以得到以轴力表示的变形协调方程即补充方程。与静力平衡方程联立，使得方程的数目与未知力的数目相等，从而求得全部未知力。现以图8.33(a)所示超静定桁架为例，介绍分析方法。

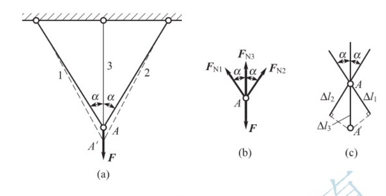


图 8.33

设杆1与杆2各横截面的拉压刚度均相同，均为 E_1A_1，杆3各横截面的拉压刚度均为 E_3A_3，杆1的长度为 l_1。在载荷 F 作用下，3杆均伸长，故可设3杆均受拉，节点 A 的受力图如图8.33(b)所示。

$$\sum F_x=0,\quad F_{N2}\sin\alpha-F_{N1}\sin\alpha=0 \tag{a}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{N1}\cos\alpha+F_{N2}\cos\alpha+F_{N3}-F=0 \tag{b}$$

3杆原交于一点 A，因由铰链相连，变形后它们仍应交于一点。此外，由于杆1与杆2的受力和拉压刚度均相同，节点 A 应沿铅垂方向下移，各杆的变形关系如图8.33(c)所示。为了保证3杆变形后仍交于一点，即保证结构的连续性，杆1、杆2的变形 Δl_1 与杆3的变形 Δl_3 之间应满足如下关系

$$\Delta l_1=\Delta l_3\cos\alpha \tag{c}$$

保证结构连续性所应满足的变形几何关系称为变形协调条件或变形协调方程。变形协调条件即为求解超静定问题的补充条件。

设3杆均处于线弹性范围，则由胡克定律可知，各杆的变形与轴力间的关系为

$$\Delta l_1=\frac{F_{N1}l_1}{E_1A_1}$$

$$\Delta l_3=\frac{F_{N3}l_1\cos\alpha}{E_3A_3}$$

将上述关系式代入式(c)得以轴力表示的变形协调方程，即补充方程为

$$F_{N1}=\frac{E_1A_1}{E_3A_3}\cos^2\alpha F_{N3} \tag{d}$$

最后，联立求解平衡方程(a)、方程(b)与补充方程(d)，于是得

$$F_{N1}=F_{N2}=\frac{F\cos^2\alpha}{\dfrac{E_3A_3}{E_1A_1}+2\cos^3\alpha}$$

$$F_{N3}=\frac{F}{1+\dfrac{E_1A_1}{E_3A_3}\cos^3\alpha}$$

所得结果均为正，说明各杆轴力均为拉力的假设是正确的。

综上所述，求解超静定问题必须考虑以下3个方面：满足平衡方程，满足变形协调条

件，符合力与变形间的物理关系(如在线弹性范围之内，即符合胡克定律)。简而言之，即应综合考虑静力学、几何与物理3方面。材料力学的许多基本理论也正是从这3个方面进行综合分析后建立的。

例 8.9 图8.34所示为一两端固定的等截面直杆AB，截面C受轴向力F的作用，杆的拉压刚度为EA，试求两端约束反力。

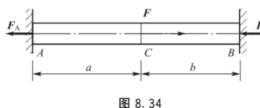


图 8.34

解：杆AB为轴向拉压杆，故两端的约束反力也均沿轴线方向，独立平衡方程只有1个，未知力数为2个，故为一次超静定问题，所以需建立一个补充方程。

(1) 建立静力平衡方程：

$$\sum F_x=0,\quad F-F_A-F_B=0$$

$$F_A+F_B=F \tag{a}$$

(2) 分析变形协调条件，建立补充方程。

为了建立补充方程，需要分析变形协调的几何关系。在载荷与约束力的作用下，AC段和BC段均发生轴向变形，但由于两端是固定的，杆的总变形必须等于零，得杆AB变形协调的几何关系式

$$\Delta l_{AB}=\Delta l_{AC}+\Delta l_{CB}=0 \tag{b}$$

再根据胡克定律得各段的轴力与变形之间的物理关系为

$$\Delta l_{AC}=\frac{F_{NAC}a}{EA}=\frac{F_A a}{EA},\quad \Delta l_{CB}=\frac{F_{NCB}b}{EA}=-\frac{F_B b}{EA} \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，得补充方程为

$$F_A=\frac{b}{a}F_B$$

(3) 求未知约束力。

最后，联立求解静力平衡方程式(a)和补充方程式(d)，即可解出杆AB两端的约束反力

$$F_A=\frac{Fb}{a+b},\quad F_B=\frac{Fa}{a+b}$$

例 8.10 在如图8.35(a)所示的结构中，AB为刚性杆，1、2两杆的拉伸(压缩)刚度均为EA，长度均为l。加工时1杆的长度短了Δ_e($\Delta_e \ll l$)。装配后，在AB杆上再施加荷载F。试求1、2杆的轴力。

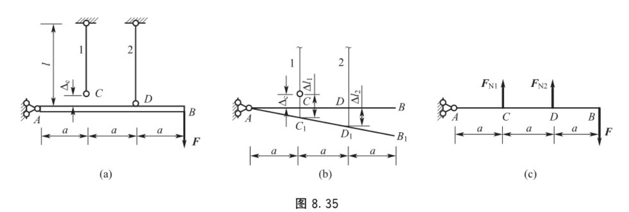


图 8.35

解：该题是求装配和荷载共同作用时1、2杆的轴力。

设装配后再加荷载 F，AB 杆将移至 AB_1，如图 8.35(b)所示。1、2 两杆均产生伸长变形，1、2 两杆的轴力均为拉力，AB 杆受力图如图 8.35(c)所示。

(1) 建立 AB 杆的平衡方程。

由图 8.35(c)可知

$$\sum M_A=0,\quad F_{N1}\times a+F_{N2}\times 2a-F\times 3a=0$$

解得

$$F_{N1}+2F_{N2}=3F \tag{a}$$

(2) 分析变形，建立补充方程。

由图 8.35(b)得到变形的方程为

$$\Delta l_2=2(\Delta l_1-\Delta_e) \tag{b}$$

由胡克定律得

$$\Delta l_1=\frac{F_{N1}l}{EA},\quad \Delta l_2=\frac{F_{N2}l}{EA} \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，解得

$$F_{N2}=2F_{N1}-2\frac{EA}{l}\Delta_e$$

(3) 求 1、2 杆的轴力。

联立求解(a)和(d)，解得

$$F_{N1}=\frac{3}{5}F+\frac{4}{5}\frac{EA}{l}\Delta_e$$

$$F_{N2}=\frac{6}{5}F-\frac{2}{3}\frac{EA}{l}\Delta_e$$

8.9 应力集中的概念

1. 应力集中

由于构造与使用等方面的需要，许多构件常常带有沟槽(如螺纹)、孔和圆角(构件由粗到细的过渡圆角)等。在外力作用下，构件中邻近沟槽、孔或圆角的局部范围内的应力急剧增大。例如，图 8.36(a)所示含圆孔的受拉薄板，圆孔处截面 $A-A$ 上的应力分布如图 8.36(b)所示，最大应力 σ_{max} 显著超过该截面的平均应力。

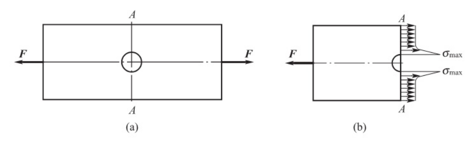


图 8.36

由于截面急剧变化所引起的应力局部增大现象，称为应力集中。应力集中的程度用应

力集中因数 K 表示，其定义为

$$K=\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} \tag{8-19}$$

式中：σ_n 为名义应力；$\sigma_{\max}$为最大局部应力。名义应力是在不考虑应力集中的条件下求得的。例如上述的含圆孔薄板，若所受拉力为 F，板厚为 δ，板宽为 b，孔径为 d，则截面 $A-A$ 上的名义应力为

$$\sigma_n=\frac{F}{(b-d)\delta}$$

最大局部应力 $\sigma_{\max}$则是由解析理论(例如弹性力学)、实验或数值办法(如有限元素法与边界元素法)等确定的。

2. 应力集中对构件强度的影响

对于由脆性材料制成的构件，应力集中现象将一直保持到最大局部应力 $\sigma_{\max}$达到强度极限之前。因此，在设计脆性材料构件时，应考虑应力集中的影响。

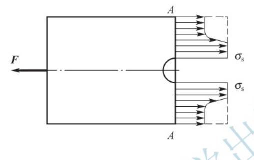


图 8.37

对于由塑性材料制成的构件，应力集中对其在静荷载作用下的强度则几乎无影响。因为当最大应力 $\sigma_{\max}$达到屈服应力 σ_s 之后，如果继续增大荷载，则所增加的载荷将由同一截面的未屈服部分承担，以致屈服区域不断扩大(图 8.37)，应力分布逐渐趋于均匀化。所以，在研究塑性材料构件的静强度问题时，通常可以不考虑应力集中的影响。

在机械和工程结构中，许多构件常常受到随时间循环变化的应力，即所谓的交变应力或循环应力。试验表明，在交变应力作用下的构件，虽然所受应力小于材料的静强度极限，但经过应力的多次重复后，构件将产生可见裂纹或完全断裂，在交变应力作用下，构件将产生可见裂纹或完全断裂的现象，称为疲劳破坏。试验还表明，应力集中促使疲劳裂纹的形成与扩展，因而对构件(无论是塑性还是脆性材料)的疲劳强度影响极大。所以，在工程设计中，要特别注意减小构件的应力集中。

本章小结

1. 基本概念

(1) 内力、轴力的概念。掌握使用截面法计算各截面的轴力，正确画出杆件轴力图。

(2) 应力、应变的概念。用胡克定律解决实际工程问题。

(3) 拉压超静定问题。应用材料力学的应力、应变关系及几何条件，建立补充的力学方程，以便解决简单的超静定问题。

2. 基本公式

(1) 拉压杆横截面的正应力：

$$\sigma=\frac{F_{\mathrm{N}}}{A}$$

(2) 拉压杆斜截面的正应力：

$$\sigma_\alpha=\sigma\cos^2\alpha, \quad \tau_\alpha=\frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha$$

(3) 胡克定律：

$$\Delta l=\frac{F_N l}{EA}, \quad 或 \sigma=E\cdot\varepsilon, \quad 其中 \varepsilon=\frac{\Delta l}{l}$$

(4) 强度条件：

$$\sigma_{\max}=\left(\frac{F_N}{A}\right)_{\max}\leqslant[\sigma]$$

3. 材料的主要机械性质指标

强度指标：屈服极限 $\sigma_s(\sigma_{0.2})$，强度极限 σ_b；

塑性指标：延伸率 δ，截面收缩率 ψ。

思　考　题

1. 轴向拉伸杆，最大正应力与最大切应力分别发生在哪个截面上？

2. 材料不同、横截面面积也不同的两根拉杆，受相同的轴向拉力作用，问(a)轴力是否相同？(b)应力是否相同？(c)应变是否相同？(d)强度是否相同？

3. 材料进入屈服极限后，产生的变形包括哪几种？

4. 材料 a、b 与 c 的应力--应变曲线如图 8.38 所示，其中：材料______的强度最高；材料______的弹性模量最大；材料______的塑性最好。

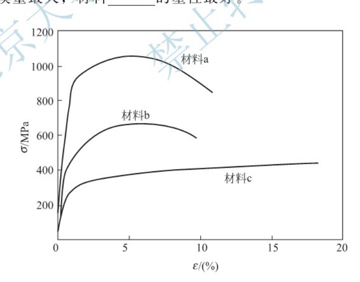


图 8.38

5. 试指出下列概念的区别

(1) 内力与应力；

(2) 变形与应变；

(3) 弹性变形与塑性变形；

(4) 强度极限与极限应力；

（5）极限应力与许用应力；

（6）工作应力与许用应力。

习　　题

8－1　试求图8.39所示各杆1－1和2－2截面上的轴力，并作轴力图。

8－2　试求图8.40所示等直杆横截面1－1、2－2和3－3上的轴力，并作轴力图。若横截面面积$A=400\text{mm}^2$，试求各截面上的应力。

8－3　试求图8.41所示梯形状直杆截面1－1、2－2和3－3上的轴力，并作轴力图。若横截面面积$A_1=200\text{mm}^2$，$A_2=300\text{mm}^2$，$A_3=400\text{mm}^2$，试求各截面上的应力。

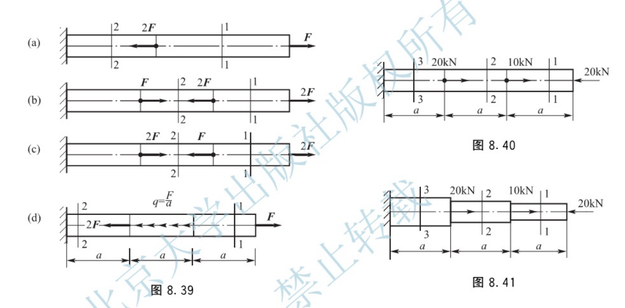


图 8.39

图 8.40

图 8.41

8－4　图8.42所示拉压杆承受轴向拉力$F=10\text{kN}$，杆的横截面面积$A=100\text{mm}^2$。如以α表示斜截面与横截面的夹角，试求当$\alpha=0°$、30°、45°、60°、90°时各斜截面上的正应力和切应力，并在图上表示出其方向。

8－5　一根等直杆的受力，如图8.43所示。已知杆的横截面面积A和材料的弹性模量E。试作轴力图，并求杆端点D的位移。

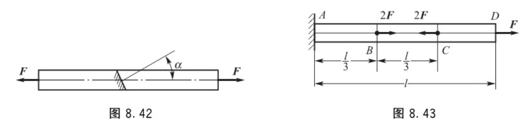


图 8.42

图 8.43

8－6　一木桩的受力图如图8.44所示。柱的横截面为边长200mm的正方形，可认为材料符合胡克定律，其弹性模量$E=10\text{GPa}$。如不计柱的自重，试求：

（1）作轴力图；

（2）各段柱横截面上的应力；

（3）各段柱的纵向线应变；

(4) 柱的总变形。

8－7　在图 8.45 所示的结构中，AB 为水平放置的刚性杆，杆 1、2、3 材料相同，其弹性模量 $E=210\text{GPa}$，已知 $l=1\text{m}$，$A_1=A_2=100\text{mm}^2$，$A_3=150\text{mm}^2$，$F=20\text{kN}$，试求 C 点的水平位移和铅垂位移。

8－8　图 8.46 所示的实心钢杆 AB 和 AC 在 A 点以铰相连接，在 A 点作用有铅垂向下的力 $F=35\text{kN}$。已知 AB 和 AC 的直径分别为 $d_1=12\text{mm}$ 和 $d_2=15\text{mm}$，钢的弹性模量 $E=210\text{GPa}$。试求 A 点在铅垂方向的位移。

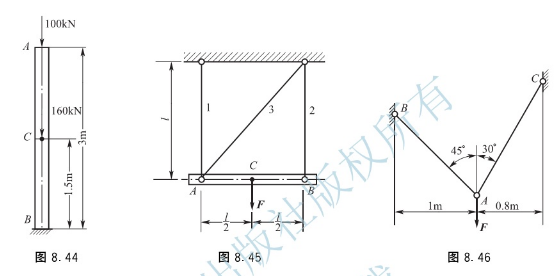


图 8.44　　图 8.45　　图 8.46

8－9　简易起重机设备的计算简图如图 8.47 所示。已知斜杆 AB 用两根 63mm×40mm×4mm 不等边角钢组成，钢的许用应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$。试问在提起重量为 $P=15\text{kN}$ 的重物时，斜杆 AB 是否满足强度条件？

8－10　一结构受力图如图 8.48 所示，杆件 AB、AD 均由两根等边角钢组成。已知材料的许用应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$，试选择杆 AB、AD 的角钢型号。

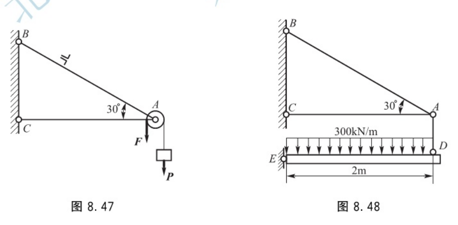


图 8.47　　图 8.48

8－11　图 8.49 所示为一个钢制圆轴，受轴向压力为 $F=600\text{kN}$ 的作用。设材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，泊松比 $\mu=0.3$。试求该轴在 F 力作用下，长度和直径变量 Δl 和 Δd 及其占原尺寸的百分数。

8－12　有一个横截面面积为 $A=10000\text{mm}^2$ 的钢杆，其两端固定，荷载如图 8.50 所示，试求钢杆各段内的应力。

8－13　图 8.51 所示杆件在 A 端固定，另一端刚性支撑 B 有一空隙 $\delta=1\text{mm}$，试求当

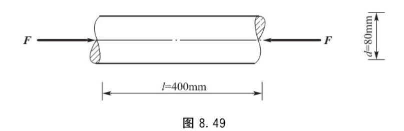


图 8.49

杆件受 $F=50\text{kN}$ 的作用后杆的轴力。设 $E=100\text{GPa}$，$A=200\text{mm}^2$，$a=1.5\text{m}$，$b=1\text{m}$。

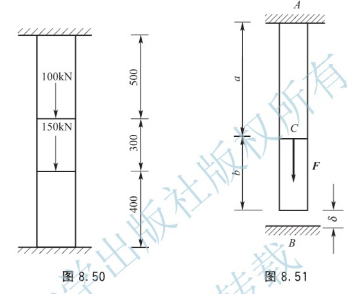


图 8.50　　图 8.51

8-14　图 8.52 所示支架中的 3 根杆件材料相同，杆 1 的横截面面积为 200mm^2，杆 2 的为 300mm^2，杆 3 的为 400mm^2。若 $F=30\text{kN}$，试求各杆内的应力。

8-15　在图 8.53 所示在结构中，1、2 两杆的抗拉刚度同为 E_1A_1，杆 3 的为 E_3A_3。杆 3 的长度为 $l+\delta$，其中 δ 为加工误差。试求将杆 3 装入 AC 位置后，1、2、3 这 3 个杆的内力。

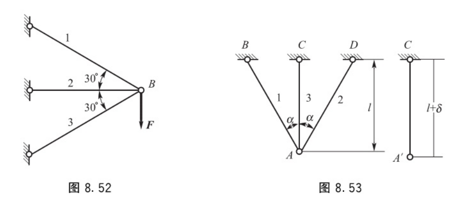


图 8.52　　图 8.53

第9章 剪　　切

【教学目标】

本章主要介绍螺栓、铆钉等连接件的简化计算方法，包括剪切实用计算和挤压实用计算两个部分，本章涉及的应力均为截面上的名义应力，要注意与截面的真实应力相互区分。

【学习要求】

通过本章学习，学生应掌握简单连接件的计算方法，能够准确判断剪切面和挤压面的位置及大小，对连接件及被连接构件进行全面的验算，保证构件正常工作。

9.1 剪切的概念及工程实例

剪切的受力特点是构件上作用着一对大小相等、方向相反、作用线之间距离很小的平行力。剪切变形的特点是二力间的截面发生错动，直至发生剪切破坏。可能发生剪切破坏的面，称为剪切面。如图 9.1(a)所示，两块钢板用螺栓连接后承受拉力 F，则在螺栓的两侧面上受到大小相等、方向相反、作用线相距很近的两组分布外力系作用。螺栓在这样的外力系作用下，将沿着 $m-m$ 截面发生相对错动，这种变形形式即为剪切，而发生剪切变形的截面 $m-m$ 即为剪切面。

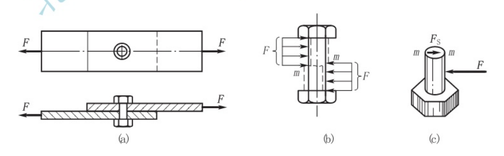


图 9.1

实际工程中，构件与构件之间常用键、铆钉、螺栓、销钉、榫头等连接在一起，如图 9.2所示。这种起连接作用的部件统称为连接件，在构件受力后主要产生剪切变形，承受剪切应力。如果应力过大，则可能会超过材料的剪切强度极限而引起构件破坏造成工程事故。

连接件的本身尺寸较小，但其受力较复杂，因而其变形亦较为复杂。在工程设计中为了方便计算，通常按照连接的破坏可能性，在试验的基础上，对它们的受力特点做一些近似的假设而提出的简化计算方法，称为实用计算法。

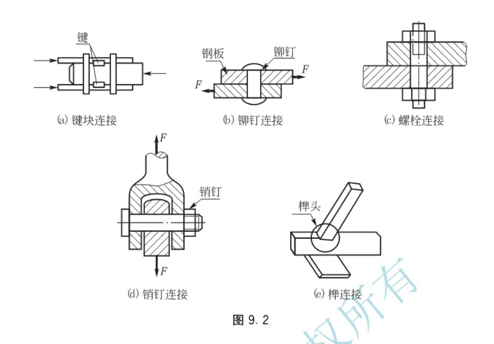


图 9.2

9.2 剪切的实用计算

图 9.3 表示两块钢板通过铆钉来连接，以及铆钉的受力情况。铆钉两侧面上所受到的分布力的合力为 F，大小相等、方向相反，但是作用线不在一条直线上，在 $m-m$ 截面处铆钉的受力方向发生突变。因此，铆钉在 $m-m$ 截面处受到剪切作用。

为了研究剪切面上的受力情况，采用截面法，在 $m-m$ 截面处将铆钉切断，取下部作为研究对象。该部分受到外力 F 的作用，设 $m-m$ 面上的内力为 F_S，如图 9.4 所示。根据力的平衡条件有

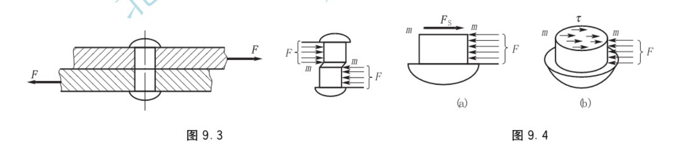


图 9.3　　　　图 9.4

$$\sum F_x=0:\quad F_S-F=0$$

所以

$$F_S=F$$

则在剪切面上有大小为 F_S，方向相反，平行于剪切面的内力，并以切应力 τ 的形式分布在截面上。在剪切实用计算中，假设剪切面上各点处的切应力相等，剪切面的面积为 A_S，于是可得到剪切面上的名义切应力为

$$\tau=\frac{F_S}{A_S} \tag{9-1}$$

求得切应力后，即可建立剪切强度条件。通过直接试验，并按名义切应力公式(9-1)，可得到剪切破坏时材料的名义极限切应力 τ_u，再除以安全系数，即可得到材料的许用名义

切应力 $[\tau]$。此时，剪切的强度条件可表示为

$$\tau=\frac{F_S}{A_S}\leqslant[\tau] \tag{9-2}$$

按名义切应力公式(9-1)求得的切应力值，并不能反映剪切面上切应力的理论真实值，而只是剪切面上的平均切应力值，但是对于低碳钢等塑性材料制成的连接件，当其临近破坏时，剪切面上的切应力将逐渐趋于均匀，符合实用计算理论的假设。因此强度条件式(9-2)基本能够满足工程实用的要求。

9.3 挤压的实用计算

在外力作用下，不但在连接件内部产生剪切力，在连接件与被连接的构件之间的接触面上还会出现局部承压现象，称为挤压。在接触面上的压力称为挤压力，记为 F_{bs}。挤压力可根据被连接件所受的外力由静力平衡条件求得，当挤压力过大时，就可能把铆钉或钢板的铆钉孔压成局部塑性变形。图 9.5(a)表示钢板因抗压强度不足在孔边缘被压溃而产生局部塑性变形；图 9.5(b)表示铆钉因抗压强度不足被压坏或压扁的情况。

构件在承受挤压力 F_{bs} 作用时，挤压面上的应力分布一般较为复杂。实用计算方法中也是假设在挤压面上应力均匀分布，以 A_{bs} 表示挤压面面积，则名义挤压应力 σ_{bs} 为

$$\sigma_{bs}=\frac{F_{bs}}{A_{bs}} \tag{9-3}$$

当接触面为圆柱面(如铆钉或螺栓与钢板之间的接触面)时，挤压面面积 A_{bs} 取为实际接触面在直径平面上的投影面积，如图 9.6 所示，这样是为了方便计算。在实际理论分析中，接触面上的理论挤压应力分布情况如图 9.6(a)所示，最大应力出现在圆柱面的中点，在实用计算中，按式(9-3)算得的名义挤压应力与接触面中点处的最大理论挤压应力值相近。当连接件与被连接构件的接触面为平面时，挤压面面积 A_{bs} 取为实际接触面的面积。

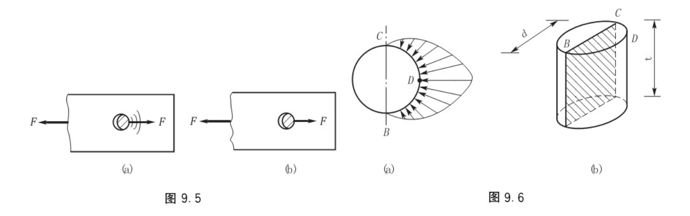


图 9.5

图 9.6

求得挤压应力后，即可建立挤压应力强度条件。通过直接试验，并按名义挤压应力式(9-3)，可得到挤压破坏时材料的名义极限挤压应力 σ_u。再除以安全系数，即可得到材料的许用名义挤压应力 $[\sigma_{bs}]$。此时，挤压的强度条件可表示为

$$\sigma_{bs}=\frac{F_{bs}}{A_{bs}}\leqslant[\sigma_{bs}] \tag{9-4}$$

因为挤压是连接件与被连接件之间的相互作用，所以当两者材料不同时，应校核其中许用挤压应力较低的材料的挤压强度。

例 9.1 图 9.7 所示的铆钉接头承受拉力 F 的作用，已知板厚 $\delta=2\text{mm}$，板宽 $b=15\text{mm}$，铆钉直径 $d=4\text{mm}$；铆钉和钢板材料相同，许用切应力 $[\tau]=100\text{MPa}$，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=300\text{MPa}$，许用拉应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$。试确定拉力 F 的许可值。

解： 该铆接接头的破坏形式可能有以下 4 种：铆钉沿其横截面 1－1 被剪断，如图 9.7(a)所示；铆钉与钢板孔壁互相挤压，产生挤压破坏；钢板沿截面 2－2 被拉断，如图 9.7(b)所示；钢板沿截面 3－3 被剪断，如图 9.7(c)所示。

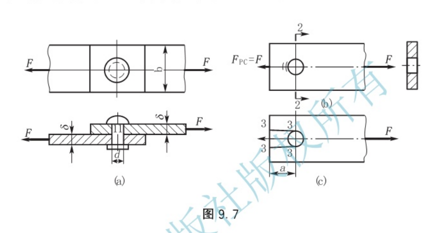


图 9.7

试验表明，当边距 a 足够大，例如大于铆钉直径 d 的两倍，最后一种形式的破坏通常可以避免。因此，铆接接头的强度分析，主要是针对前 3 种破坏而言。

(1) 铆钉的剪切强度分析。

铆钉剪切面 1－1 上的剪力 $F_S=F$，切应力为

$$\tau=\frac{F_S}{A}=\frac{4F}{\pi d^2}$$

由剪切强度条件式(9－2)，要求

$$F\leqslant\frac{\pi d^2[\tau]}{4}=\frac{\pi(4\times10^{-3})^2(100\times10^6)}{4}=1256\text{N}$$

(2) 铆钉及钢板的挤压强度分析。

因铆钉及钢板的材料相同，其挤压强度相同。铆钉与板孔壁的挤压力 $F_{bs}=F$，名义挤压应力为

$$\sigma_{bs}=\frac{F_{bs}}{A_{bs}}=\frac{F}{\delta d}$$

根据挤压强度条件式(9－4)，有

$$F\leqslant\delta d[\sigma_{bs}]=(2\times10^{-3})(4\times10^{-3})(300\times10^6)=2400\text{N}$$

(3) 钢板的拉伸强度分析。

钢板横截面 2－2 上的拉伸正应力最大，其值为(不考虑应力集中的影响)

$$\sigma=\frac{F}{(b-d)\delta}$$

根据拉压杆的强度条件，有

$$F\leqslant(b-d)\delta[\sigma]=(15\times10^{-3}-4\times10^{-3})(2\times10^{-3})(160\times10^6)=3520\text{N}$$

综合以上 3 方面可知，该接头的许可拉力为

$$F=1256\text{N}=1.256\text{kN}$$

例 9.2 某钢桁架的一节点，如图 9.8(a)所示。斜杆 A 由两个 63mm×6mm 的等边角钢组成，受力 $F=140\text{kN}$ 的作用。该斜杆用螺栓连接在厚度为 $\delta=10\text{mm}$ 的节点板上，螺栓直径为 $d=16\text{mm}$。已知角钢、节点板和螺栓的材料均为 Q235 钢，许用应力为 $[\sigma]=170\text{MPa}$，$[\tau]=130\text{MPa}$，$[\sigma_{bs}]=300\text{MPa}$。试选择螺栓个数，并校核斜杆 A 的拉伸强度。

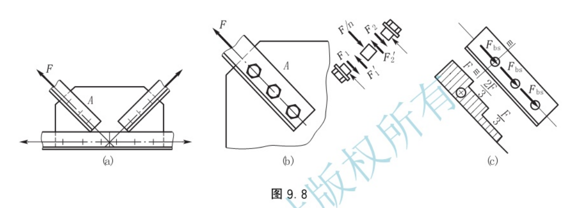


图 9.8

解： 选择螺栓个数的问题在性质上与截面选择的问题相同，先用剪切强度条件式(9-2)选择螺栓个数，然后用挤压强度条件式(9-4)来校核。

首先分析每个螺栓所受到的力。当各螺栓直径相同，且外力作用线通过该组螺拴截面的形心时，可假定每个螺栓的受力相等。所以，在具有 n 个螺栓的接头上作用的外力为 F 时，每个螺栓所受到的力即等于 F/n。

螺栓有两个剪切面［图 9.8(b)］，由截面法可得每个剪切面上的剪力为

$$F_S=\frac{F/n}{2}=\frac{F}{2n}$$

将剪力和有关的已知数据代入剪切强度条件式(9-2)

$$\tau=\frac{F_S}{A_s}=\frac{\dfrac{F}{2n}}{\dfrac{\pi d^2}{4}}=\frac{2\times140\times10^3\,\text{N}}{n\pi\times(16\times10^{-3}\,\text{m})^2}\leqslant130\times10^6\,\text{Pa}$$

于是求得螺栓数为

$$n\geqslant\frac{2\times140\times10^3\,\text{N}}{\pi\times(16\times10^{-3}\,\text{m})^2\times(130\times10^6\,\text{Pa})}=2.68$$

取 $n=3$。

校核挤压强度。由于节点板的厚度小于两角钢厚度之和，所以应校核螺栓与节点板之间的挤压强度。每个螺栓所受的力为 F/n，也即螺栓与节点板间相互的挤压力，即

$$F_{bs}=\frac{F}{n}$$

由式(9-4)可得名义挤压应力为

$$\sigma_{bs}=\frac{F_{bs}}{A_{bs}}=\frac{\dfrac{F}{n}}{\delta d}$$

将已知数据代入上式，得

$$\sigma_{bs}=\frac{F}{n\delta d}=\frac{140\times1000\text{N}}{3\times(10\times10^{-3}\text{m})(16\times10^{-3}\text{m})}=292\times10^{6}\text{Pa}=292\text{MPa}<[\sigma_{bs}]$$

可见，采用3个螺栓满足挤压强度条件。

校核角钢的拉伸强度。取两根角钢一起作为分离体，其受力图及轴力图，如图9.8(c)所示。由于角钢在 $m-m$ 截面上轴力最大，该横截面又因螺栓孔而削弱，故为危险截面。该截面上的轴力为

$$F_{N,\max}=F=140\text{kN}$$

由型钢规格表查得63mm×63mm角钢的横截面面积为 7.29cm^2，故危险截面 $m-m$ 的面积为

$$A=2\times(729\text{mm}^2-6\text{mm}\times16\text{mm})=1266\text{mm}^2$$

角钢横截面 $m-m$ 上的拉伸正应力为

$$\sigma=\frac{F_{N,\max}}{A}=\frac{140000\text{N}}{12.66\times10^{-4}\text{m}^2}=111\times10^{6}\text{Pa}=111\text{MPa}<[\sigma]$$

可见，斜杆满足拉伸强度条件。

在计算 $m-m$ 截面上的拉应力时应用了轴向拉伸的正应力公式，实际上，由于角钢上的螺栓孔，使横截面发生应力集中现象。但考虑到杆的材料为Q235钢，具有良好的塑性，当杆接近破坏时，危险截面 $m-m$ 上各部分材料均将达到屈服，各点处的正应力趋于相等，故假设该截面上各点处的正应力相等是可以的。

本章小结

1. 实用计算

按构件的破坏能力，采用既反映受力的基本特征，又简化计算的假设，计算其名义应力，然后根据直接试验的结果，确定其许用应力，进行强度计算。

2. 剪切的实用计算

剪切面：构件有沿其发生相互错动趋势的截面。

剪力：剪切面上的内力分量 F_S，由截面法求得。

基本假设：名义切应力在剪切面上均匀分布。

强度条件：名义切应力不得超过由直接试验结果，按名义切应力公式，并考虑安全因素后的许用切应力，即

$$\tau=\frac{F_S}{A_S}\leqslant[\tau]$$

3. 挤压的实用计算

挤压：两构件相互接触的局部承压现象。

挤压面：两构件间相互接触的局部接触面。

挤压力：局部接触面上总压力。

基本假设：挤压应力在计算挤压面面积上均匀分布。若挤压面为平面(如键等)，则计算挤压面面积即为实际的挤压面(接触面)面积；若挤压面为半圆柱面(如铆钉、螺栓、

销钉等)，则计算挤压面面积等于实际挤压面(接触面)面积在其直径平面上的投影(图 9.9)。

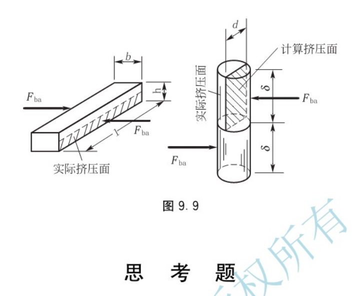


图 9.9

思 考 题

1. 在图 9.10 所示铆接结构中，力是如何传递的？

2. 试问压缩与挤压有何区别？为何挤压许用应力大于压缩许用应力？

3. 某木桥上的斜支柱是撑在橡木垫子上的，而橡木垫又通过齿形榫将力传递给桥桩，如图 9.11 所示。试分析该齿形榫的接切面面积和承压面面积。

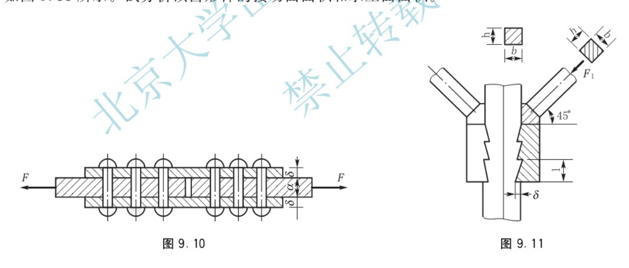


图 9.10　　图 9.11

习 题

9-1　试确定图 9.12 所示连接或接头中的剪切面和挤压面。

9-2　如图 9.13 所示，起重机的吊钩与吊板通过销轴联结，吊起重物 F。已知 $F=40$kN，销轴直径 $D=22$mm，吊钩厚度 $t=20$mm。销轴许用应力：$[\tau]=60$MPa，$[\sigma_{bs}]=120$MPa。试校核销轴的强度。

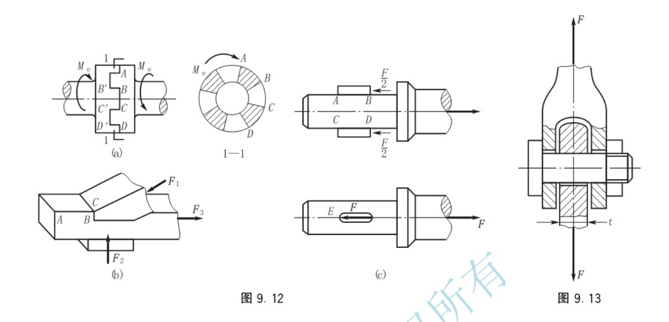


图 9.12　　　　图 9.13

9－3　如图 9.14 所示，一螺栓将拉杆与厚为 8mm 的两块盖板相连接。各零件材料相同，许用应力均为 $[\sigma]=80\text{MPa}$，$[\tau]=60\text{MPa}$，$[\sigma_{bs}]=160\text{MPa}$。若拉杆厚度 $\delta=15\text{mm}$，拉力 $F=120\text{kN}$，试设计螺栓直径 d 及拉杆宽度 b。

9－4　图 9.15 所示螺栓在拉力 F 作用下。已知材料的剪切许用应力 $[\tau]$ 和拉伸许用应力 $[\sigma]$ 之间的关系约为：$[\tau]=0.6[\sigma]$。试求螺栓直径 d 与栓头高度 h 的合理比值。

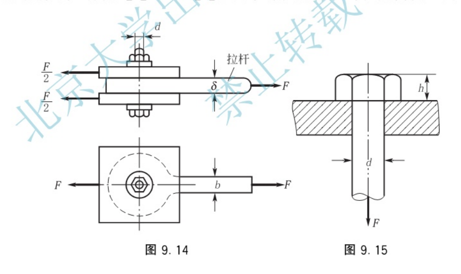


图 9.14　　　　图 9.15

9－5　图 9.16 所示两块钢板，由一个螺栓联结。已知：螺栓直径 $d=24\text{mm}$，每块板的厚度 $\delta=12\text{mm}$，拉力 $F=27\text{kN}$，螺栓许用应力 $[\tau]=060\text{MPa}$，$[\sigma_{bs}]=120\text{MPa}$。试对螺栓作强度校核。

9－6　图 9.17 所示为一螺栓接头。已知 $F=40\text{kN}$，螺栓许用应力 $[\tau]=130\text{MPa}$，$[\sigma_{bs}]=300\text{MPa}$。试计算螺栓所需的直径(图中单位：mm)。

9－7　拉力 $=80\text{kN}$ 的螺栓连接如图 9.18 所示。已知 $b=80\text{mm}$，$\delta=10\text{mm}$，$d=22\text{mm}$，螺栓的许用切应力 $[\tau]=300\text{MPa}$，钢板的许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=120\text{MPa}$，许用拉应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$。试校核接头强度。

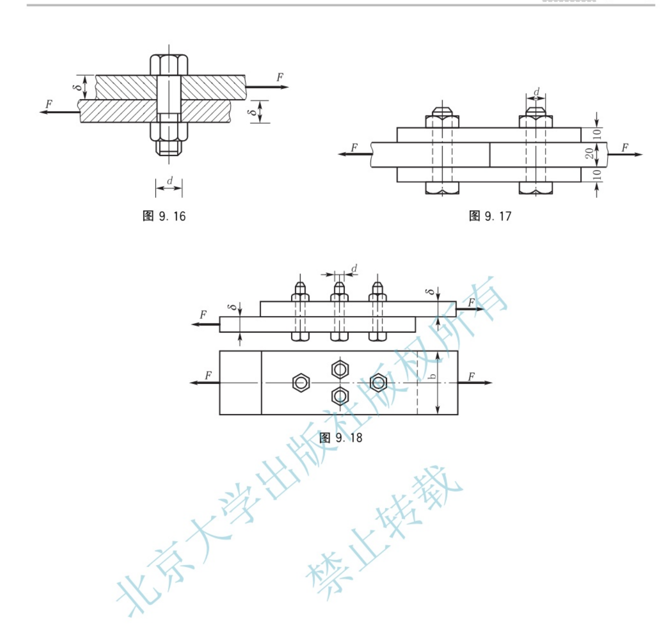


图 9.16

图 9.17

图 9.18

第10章 扭 转

【教学提示】

本章首先介绍扭转的概念和扭矩图的画法，然后介绍扭矩在截面上产生的切应力的分布情况：用薄壁圆环受扭介绍切应力在圆周上的分布特点；用实心圆杆受扭介绍切应力在直径方向上的分布特点。同时也介绍了材料力学中较为常用的一种推导方法，即综合分析几何、物理、力学平衡这3方面问题，来研究截面上的应力分布情况。通过以上结论，进一步得出切应力的双生互等定理。本章最后，介绍圆杆受扭时扭转角的计算以及刚度条件。

【学习要求】

通过本章学习，学生应能够应用截面法绘制扭矩图，根据扭矩图找到危险截面，然后分析危险截面上的切应力分布情况，看其是否满足强度条件。同时也能够计算受扭圆杆的扭转角，看其是否满足刚度条件，进而判断受扭圆杆能否正常工作。除此之外，还应掌握切应力双生互等定理，以及综合分析几何、物理和力学平衡来分析截面应力分布情况的推导方法。

10.1 扭转的概念及工程实例

工程中的受扭构件较为常见。如图10.1所示的汽车转向轴，驾驶员操纵方向盘将力偶矩作用于转向轴的B端，转向轴的A端则受到来自转向器的阻抗力偶矩的作用，使转向轴AB发生扭转变形。又如图10.2中的传动轴，在力偶矩作用下的主动轮使传动轴转动，从而带动从动轮，而从动轮上作用着阻抗力偶矩的作用，传动轴将发生扭转变形。

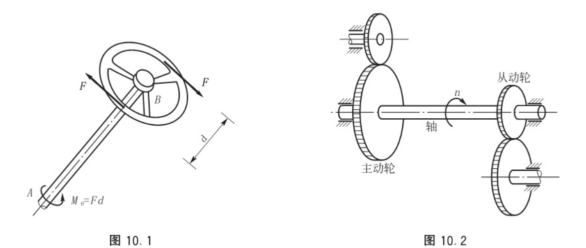


图10.1　　图10.2

扭转变形的受力特点是：杆件受力偶矩的作用，各力偶矩的作用平面垂直于杆轴。如图 10.3 所示，圆轴 AB 段两端各作用一个力偶矩，并且大小相等、方向相反、作用面垂直于杆轴。此时杆件将产生扭转变形，圆轴各横截面将绕其轴线发生相对转动。任意两横截面间相对转过的角度，称为相对扭转角，以 φ 表示。φ_{AB}表示截面 B 相对于截面 A 的扭转角。同时杆件表面的纵向直线也转了一个角度 γ，变成螺旋线，γ 称为剪切角，这就是扭转变形的特点。

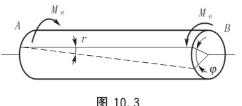


图 10.3

工程中产生扭转变形的杆件，除受扭转作用外，往往还伴随有弯曲、拉压等其他形式的变形。如果这些构件是以扭转为主，其他变形为辅，并且可忽略不计，则可按扭转变形杆件进行强度和刚度的计算，否则为组合变形问题，将在以后研究。

10.2 扭矩的计算和扭矩图

要研究受扭杆件的应力和变形，首先要分析作用于轴上的外力偶矩及内力(即扭矩)。由于外力偶往往有多个，因此，不同节段上的扭矩也各不相同，可用截面法来计算横截面上的扭矩。以图 10.4 所示圆轴为例，两端受到外力偶矩 M_e 的作用，若要分析 $m-m$ 截面处的扭矩，首先用假想截面将圆杆在 $m-m$ 截面处分成两部分，可任取一部分作为研究对象。若取右侧单元作为研究对象，如图 10.4(b)所示，因其处于平衡状态，力偶矩只能用力偶矩来平衡，则要求 $m-m$ 截面上的内力为一个力偶矩 T，由平衡方程 $\sum M_x=0$ 可得

$$T-M_e=0$$

$$T=M_e$$

若取左部分作为研究对象，如图 10.4(c)所示，同样可求得 $m-m$ 截面上的扭矩 $T'=M_e$。其中 T'与 T 是作用力与反作用力关系，大小相等，方向相反，作用在不同的部分上。为了研究问题的方便，使无论从哪个部分求得的 $m-m$ 截面上的扭矩不但数值相同，符号也相同，把扭矩 T 的符号作如下规定：采用右手螺旋法则，用四指表示扭矩的转向，大拇指的指向表示扭矩的矢量方向，矢量方向与截面的外法线方向相同时，该扭矩为正，反之为负。应用此规则可知，图 10.4 所示$m-m$截面之扭矩为正号。在用截面法求某截面扭矩时，通常假设切开的截面上受正扭矩，进而列平衡方程求未知数。

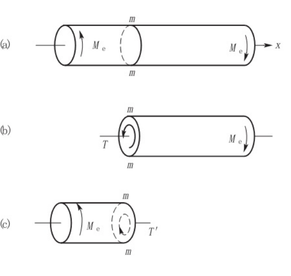


图 10.4

当轴上作用有两个以上的外力偶矩时，应分段计算轴的扭矩。为了清楚地表示扭矩沿轴线的变化情况，通常以横坐标表示截面的位置，纵坐标表示扭矩的大小，给出各截面扭矩随其位置而变化的示意图，称为扭矩图。绘制扭矩

图时若将各外力偶矩的转动方向变成矢量方向，则与轴力图的绘制方法相同。

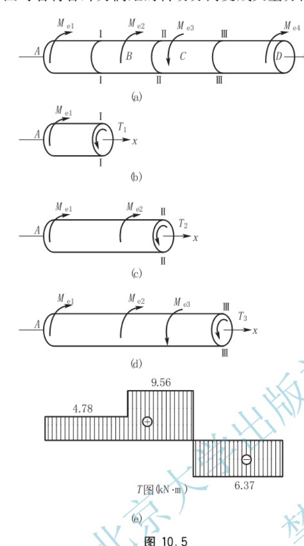


图 10.5

例 10.1 一传动轴如图 10.5(a)所示，所受外力偶矩分别为：$M_{e1}=4.78\times10^{3}\,\mathrm{N\cdot m}$、$M_{e2}=4.75\times10^{3}\,\mathrm{N\cdot m}$、$M_{e3}=15.9\times10^{3}\,\mathrm{N\cdot m}$、$M_{e4}=6.37\times10^{3}\,\mathrm{N\cdot m}$。试绘出轴的扭矩图。

由轴的计算简图可知，AB、BC、CD3 段上的扭矩值是不变的，因此分为 3 段，计算各段内的扭矩值。先计算 AB 段，任取一个横截面 Ⅰ-Ⅰ，并假设切分出的截面所受扭矩为正，可列平衡方程

$$\sum M_x=0$$

$$T_{\mathrm{I}}-M_{e1}=0$$

$$T_{\mathrm{I}}=M_{e1}=4.78\times10^{3}\ \mathrm{N\cdot m}$$

同理，在 BC 段内

$$T_{\mathrm{II}}=M_{e1}+M_{e2}=9.56\times10^{3}\,\mathrm{N\cdot m}$$

在 CD 段内

$$T_{\mathrm{III}}=M_{e1}+M_{e2}-M_{e3}=-6.37\times10^{3}\,\mathrm{N\cdot m}$$

CD 段内的扭矩也可以选取右侧单元来分析，会更加简单。根据这些扭矩即可作出扭矩图［图 10.4(d)］。从图中可以看出，最大扭矩发生在 BC 段内，其值为 $9.56\times10^{3}\,\mathrm{N\cdot m}$。

10.3 功率、转速与扭矩之间的关系

工程中常用的传动轴，往往只知道它所传递的功率和转速，它的外力偶矩并没有直接给出。为此，需要根据其所传递的功率和转速，求出使轴产生扭转的外力偶矩。

假设轴在带轮处(图 10.6 中的 A 轮)受到一力偶矩 M_e(单位 N·m)的作用，轴的转速为 n(r/min)，当轴转动一分钟时，该力偶矩所做的功 W 为：

$$W=2\pi n\cdot M_e \qquad \text{(a)}$$

若机器的功率为 P(kW)，1kW 相当于每秒做 1000N·m 的功，则机器每分钟做的功 W' 为

$$W'=60000P \qquad \text{(b)}$$

图 10.6

式(a)和式(b)都是每分钟所做的功，两者相等，进而可得到转换公式

$$M_e = \frac{60000P}{2\pi n} = 9550\ \frac{P}{n} \tag{10-1}$$

式中 P 的单位是 kW；n 的单位是 r/min。

10.4 薄壁圆管扭转时横截面上的切应力

设有一薄壁圆筒［图 10.7(a)］，其壁厚 δ 远小于平均半径 r_0，两端受一对大小相等转向相反的外力偶矩作用。由截面法可知，圆筒任一横截面上的内力只有扭矩 T，并且大小相等［图 10.7(b)］。由截面上的应力与微面积 dA 之乘积的合成只构成扭矩可知，截面上只有切应力。

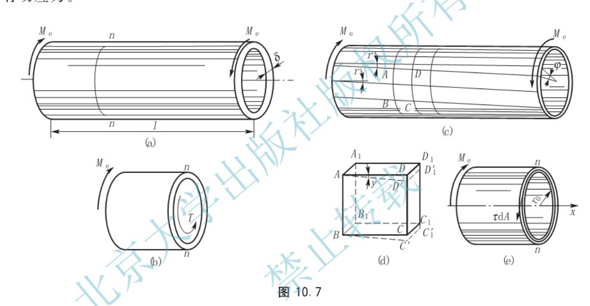


图 10.7

为了更好地表示薄壁圆筒在扭矩作用下的变形情况，可预先在圆筒表面画上等间距的圆周线和纵向线，扭转后可观察到下列现象［图 10.7(c)］：圆周线保持不变，而纵向线发生倾斜，在小变形时仍保持为直线。由此可以推知，横截面的大小和形状在变形过程中保持不变，相邻两横截面只是绕圆筒轴线发生相对转动，同样可以说明横截面上只有切应力，否者相邻截面之间沿着轴向会出现拉伸或者压缩变形。圆筒两端截面之间的相对扭转角是 φ。圆筒表面上每个格子的直角都改变了相同的剪切角 γ［图 10.7(d)］，这个直角改变量也称为切应变，它和截面上沿圆周切线方向的切应力是一一对应的。由于每个格子的切应变都相等，根据材料均匀连续的假设，可以推知，沿圆周各点处的切应力与圆周相切并且数值相等。由于壁厚 δ 远小于平均半径 r_0，可近似认为沿壁厚方向各点处切应力的数值均相等，其值为 τ［图 10.7(e)］。于是可以得到下列静力条件

$$\int_A \tau \mathrm{d}A \cdot r = T$$

式中 $\tau \mathrm{d}A$ 为微面积上的微剪力，而 $\tau \mathrm{d}A \cdot r$ 为微剪力对截面中心的力矩，上式表示全截面所有微内力的力矩之和等于扭矩 T。其中 τ 为常量，并且 r 可以用平均半径 r_0 代替，而积分 $\int_A \mathrm{d}A = 2\pi r_0 \delta$ 为圆筒横截面面积，代入上式中可得

$$\tau=\frac{T}{2\pi r_0\delta r_0}=\frac{T}{2A_0\delta} \tag{10-2}$$

式中 $A_0=\pi r_0^2$ 为平均半径所包围的面积。式(10-2)即为计算薄壁圆管受扭时横截面上切应力 τ 的公式。

由图 10.7(c)所示的几何关系，可得到切应变 γ 和相距 l 的两端面间的相对转角 φ 的关系

$$\gamma=\frac{\varphi r}{l} \tag{10-3}$$

式中，r 为薄壁圆筒的外半径。

通过薄壁圆筒的扭转试验还可以发现，当外力偶矩在一定范围以内，相对扭转角 φ 与截面间的扭矩 T 之间存在着正比关系，由式(10-2)、式(10-3)式可知，γ 与 τ 之间也存在正比关系。

10.5 切应力双生互等定理和剪切胡克定律

1. 切应力双生互等定理

从受扭薄壁圆管横截面上取出一个小单元体(图 10.8)，由上一节可知，左右侧面(如侧面 $abcd$)上只有切应力存在。

假设单元体四个侧面上的切应力分别为 τ_x'，τ_x''，τ_y' 和 τ_y''，由平衡条件可列方程

$\sum F_x=0$，$\tau_y'\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\tau_y''\mathrm{d}x\mathrm{d}z=0$，得 $\tau_y'=\tau_y''$；

$\sum F_y=0$，$\tau_x''\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\tau_x'\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，得 $\tau_x'=\tau_x''$；

$\sum M_{Oz}=0$，$\tau_x'\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\tau_y''\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y=0$，得 $\tau_x'=\tau_y''$。

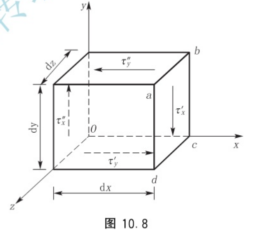


图 10.8

由此可知，在单元体相互垂直的平面上，切应力必然成对出现，它们大小相等，并且都垂直于两个平面的交线，方向则同时指向或同时背离这一交线。这一规律称为切应力双生互等定理。

图 10.8 所示的单元体的应力状态称为纯剪切应力状态，其 4 个侧面上无正应力而只有切应力。可以证明，切应力双生互等定理不仅对纯剪切应力状态成立，对正应力和切应力同时作用的非纯剪切单元体同样成立。

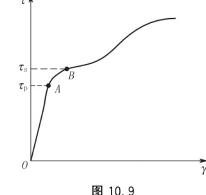


图 10.9

2. 剪切胡克定律

10.4 节通过薄壁圆筒的扭转分析，得到了切应力 τ 和切应变 γ 之间成正比关系，通过低碳钢薄壁钢管试验同样可以得到验证。根据外力偶矩计算出切应力 τ，再用精密仪器测量出剪切角 γ，据此可以绘制 $\tau-\gamma$ 关系曲线，如图 10.9 所示。图中对应于 A、B 两点的值分别为剪切变形的弹性极限 τ_p 和屈服极限 τ_s，在弹性极限范围内，τ 与 γ

成正比关系，即 $\tau=G\gamma$。

此为材料的剪切胡克定律，式中的比例系数 G 称为材料的切变模量或剪切模量，单位为Pa。钢材的切变模量约为80GPa。根据理论分析和试验验证，在弹性变形范围内，G 与其他两个弹性常数 E、μ 之间有下列关系式：

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)} \tag{10-4}$$

式中 E 为拉压弹性模量、μ 为泊松比。对于钢材，$\mu=0.3$，可得 $G=0.384E$；对于混凝土，$\mu=1/6$，可得 $G=0.425E$。对于每一种各向同性的材料，都存在这种关系，可通过任意2个值求得第3个值。

10.6 实心圆杆受扭时横截面上的应力

在讨论受扭实心圆杆横截面上的应力时，同样采用薄壁圆筒的研究方法，即从几何、物理、静力学3个方面进行分析。

1. 几何方面

为了观察圆轴的扭转变形，与薄壁圆筒受扭一样，也是在圆轴表面上作圆周线和纵向线(图10.10)。在扭转力偶矩 M_e 作用下得到与薄壁圆筒受扭时相似的现象：圆周线绕轴线相对地旋转了一个角度，但大小、形状和相邻圆周线间的距离保持不变。在小变形的情况下，纵向线仍近似的是一条直线，只是倾斜了一个微小的角度 γ。变形前圆杆表面上的方格，变形后错动成为菱形。

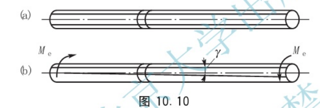


图10.10

根据观察到的现象可作如下基本假设：圆轴扭转变形前的横截面，在变形后仍保持为平面，大小和形状均未改变，半径仍保持为直线；且相邻两横截面间的距离不变，只是像刚性圆片那样绕杆轴转了一个角度，这就是圆轴扭转的平截面假设。由此也可以进一步推断，在圆杆的横截面上只有切应力而无正应力，且切应力方向与圆轴的切线平行。为了确定切应力的值，可先从切应变入手，确定横截面上任一点处的切应变随点的位置而变化的规律。

在图10.10(b)中截取长度为 dx 的杆段进行分析，其变形情况如图10.11(a)所示。截

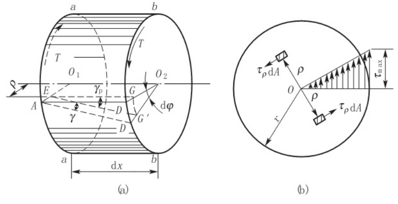


图10.11

面 $b-b$ 相对于截面 $a-a$ 绕杆轴转动了一个角度 $\mathrm{d}\varphi$，因此 $b-b$ 截面上的任意半径 O_2D 也转动了同一个角度 $\mathrm{d}\varphi$。截面发生相对转动之后，杆表面的纵向线 AD 也倾斜了一个角度。纵向线的倾斜角 γ 就是横截面周边上任一点 A 处的切应变。同时，通过半径 O_2D 上任一点 G 的纵向线 EG 在杆变形后也倾斜了一个角度 γ_ρ，且这个角度越靠近圆心越小，此为横截面半径上任一点 E 处的切应变。设 G 点至横截面圆心的距离为 ρ，根据几何关系有

$$\gamma_\rho \approx \tan\gamma_\rho = \frac{\overline{GG'}}{\overline{EG}} = \frac{\rho\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

即

$$\gamma_\rho = \rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

上式表示等直圆杆横截面上任一点处的切应变随该点在横截面上的位置而变化的规律。其中 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ 表示相对扭转角沿杆长度的变化率，以 θ 表示，即

$$\theta = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{a}$$

于是

$$\gamma_\rho = \theta\rho \tag{b}$$

对于给定的横截面来说 θ 是一个常量，因此在同一半径 γ_ρ 的圆周上，各点处的切应变均相等，且与 ρ 成正比。

2. 物理方面

由剪切胡克定律可知，在线弹性范围内切应力与切应变成正比，即

$$\tau = G\gamma \tag{c}$$

将式(b)代入式(c)中，令相应点处的切应力为 τ_ρ，可得到横截面上切应力变化规律的表达式

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\theta\rho \tag{d}$$

由上式可知，在同一半径 ρ 的圆周上各点处的切应力值 τ_ρ 均相等，且与成正比，方向垂直于半径，此时可以得到切应力沿任一半径的变化情况，如图 10.11(b)所示。

3. 静力学方面

由于在横截面任一直径上至圆心距离相等的两点处的微剪力 $\tau_\rho dA$ 等直反向［图 10.11(b)］，因此整个截面上的微剪力的合力必等于零，合力偶矩为 T。因为 τ_ρ 的方向垂直于半径 ρ，所以微剪力 $\tau_\rho\mathrm{d}A$ 对圆心的力矩为 $\rho\tau_\rho\mathrm{d}A$。则由合力矩定理可得

$$\int_A \rho\tau_\rho\,\mathrm{d}A = T \tag{e}$$

将式(d)代入式(e)中得

$$G\theta\int_A \rho^2\,\mathrm{d}A = T$$

于是有

$$\theta = \frac{T}{GI_\mathrm{p}} \tag{10-5}$$

式中 $I_\mathrm{p} = \int_A \rho^2\,\mathrm{d}A$，为仅与横截面的几何尺寸有关参数，称为横截面的极惯性矩。将式(10-5)

代入式(d)中得

$$\tau_{\rho}=\frac{T\rho}{I_{p}} \tag{10-6}$$

上式即为等直圆杆在扭转时横截面上任一点处切应力的计算公式。此式表明切应力的大小与该截面的扭矩成正比，与极惯性矩成反比，与作用点离圆心的距离成正比，且最大切应力发生在截面的边缘。

$$\tau_{max}=\frac{Tr}{I_{p}}$$

令 $W_{p}=\frac{I_{p}}{r}$，则有

$$\tau_{max}=\frac{T}{W_{p}} \tag{10-7}$$

式中，W_{p} 称为扭转截面系数，单位为 m^{3}。

求得最大切应力后，即可建立强度条件

$$\tau_{max}=\frac{T}{W_{p}}\leqslant[\tau] \tag{10-8}$$

［τ］为扭转许用切应力，其值可查有关资料获得。材料的许用剪应力［τ］与许用正应力［σ］之间一般有如下的关系。

对于钢材：$[\tau]\approx(0.5-0.6)[\sigma]$；

对于铸铁：$[\tau]\approx(0.8-1.0)[\sigma]$。

式中［σ］是抗拉许用应力。

应当注意，抗扭许用切应力值与上一章中的名义许用切应力值不同，因为两者的试验依据不同。

下面为圆杆的极惯性矩 I_{p} 和扭转截面系数 W_{p} 的计算方法。首先在圆截面上距离圆心为 ρ 处取厚度为 $d\rho$ 的环形面积作为面积微元［图 10.12(a)］，并由式 $I_{p}=\int_{A}\rho^{2}dA$ 可得圆截面的极惯性矩为

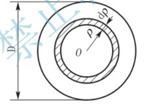


图 10.12

$$I_{p}=\int_{A}\rho^{2}dA=\int_{0}^{\frac{D}{2}}2\pi\rho^{3}d\rho=\frac{\pi D^{4}}{32} \tag{10-9}$$

扭转截面系数为

$$W_{p}=\frac{I_{p}}{r}=\frac{I_{p}}{D/2}=\frac{\pi D^{3}}{16} \tag{10-10}$$

同样也可以求得空心圆杆的极惯性矩 I_{p} 和扭转截面系数 W_{p}，设空心圆截面的内、外直径分别为 d 和 D［图 10.12(b)］，其比值为 $\alpha=\frac{d}{D}$，则有

$$I_{p}=\int_{A}\rho^{2}dA=\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}}2\pi\rho^{3}d\rho=\frac{\pi}{32}(D^{4}-d^{4})=\frac{\pi D^{4}}{32}(1-\alpha^{4}) \tag{10-11}$$

$$W_{p}=\frac{I_{p}}{r}=\frac{\pi(D^{4}-d^{4})}{16D}=\frac{\pi D^{3}}{16}(1-\alpha^{4}) \tag{10-12}$$

10.7 空心圆杆受扭时横截面上的应力

通过实心圆杆横截面上切应力的分布规律可知，越是靠近杆轴处切应力越小，所以该处材料的强度没有得到充分利用。若将这部分材料挖下来放到圆杆横截面的外缘形成空心圆杆，则可以充分发挥材料的作用，提高材料的利用率(图 10.13)。

由于平截面假设同样适用于空心圆杆，因此切应力计算式(10－6)和式(10－7)也适用于空心圆杆，只是公式中的 I_p 和 W_p 应按式(10－11)和式(10－12)式计算。

当 $d/D \geqslant 0.9$ 时，可按薄壁圆管的切应力式(10－2)计算，误差不超过 5%。为工程所允许。

例 10.2 实心圆截面轴 I 和空心圆截面轴 II［图 10.14(a)，(b)］的材料、扭转力偶矩 M_e 和长度 l 均相同，最大切应力也相等。若空心圆截面内、外直径之比为 $\alpha=0.8$，试求空心圆截面的外径与实心圆截面直径之比及两轴的重量比。

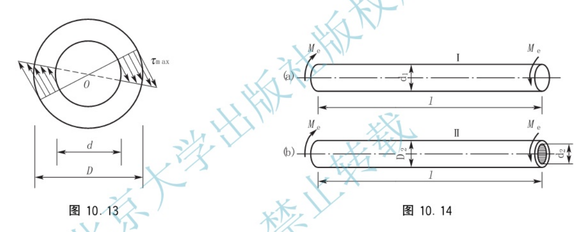


图 10.13　　图 10.14

解： 设实心圆截面直径和空心圆截面内、外直径分别为 d_1 和 d_2、D_2。

利用最大切应力相等的条件，先求比值 D_2/d_1。Ⅰ、Ⅱ两轴横截面的扭转截面系数分别为

$$W_{p1}=\frac{\pi d_1^3}{16}$$

$$W_{p2}=\frac{\pi D_2^3}{16}(1-\alpha^4)$$

分别代入式(10－8)，分别得到两轴的最大切应力

$$\tau_{1.\max}=\frac{T_1}{W_{p1}}=\frac{16T_1}{\pi d_1^3}$$

$$\tau_{2.\max}=\frac{T_2}{W_{p2}}=\frac{16T_2}{\pi D_2^3(1-\alpha^4)}$$

以 $\alpha=0.8$ 和 $T_1=T_2=M_e$ 代入以上两式，并引用已知条件 $\tau_{1,\max}=\tau_{2,\max}$ 可得

$$\frac{16T_1}{\pi d_1^3}=\frac{16T_2}{\pi D_2^3(1-\alpha^4)}$$

由此得

$$\frac{D_2}{d_1}=\sqrt[3]{\frac{1}{1-0.8^4}}=1.194$$

由于两轴的长度和材料均相同，故轴Ⅱ比轴Ⅰ的重量比等于其横截面积 A_2 和 A_1 之比，于是有

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{\frac{\pi}{4}(D_2^2-d_2^2)}{\frac{\pi}{4}d_1^2}=\frac{D_2^2(1-\alpha^2)}{d_1^2}=1.194^2(1-0.8^2)=0.512$$

由此可见，在最大切应力相等的条件下，空心圆轴的自重比实心圆轴轻，即比较节省材料。当然，在设计轴时还应全面地考虑加工等因素，不能在任何情况下都采用空心圆轴。

10.8 斜截面上的应力

10.6 和 10.7 节分析的均为受扭圆杆横截面上的切应力分布情况，结论为横截面周边各点处的切应力最大，为了全面了解杆内的应力情况，有必要研究这些点处斜截面上的应力。为此，在圆杆的表面处用横截面、径向截面以及与表面平行的面截取一个微小的正六面体，称为单元体，其所受应力情况，如图 10.15(a)所示。因单元体前后两面上无任何应力，故可将其改用平面图表示，如图 10.15(b)所示。

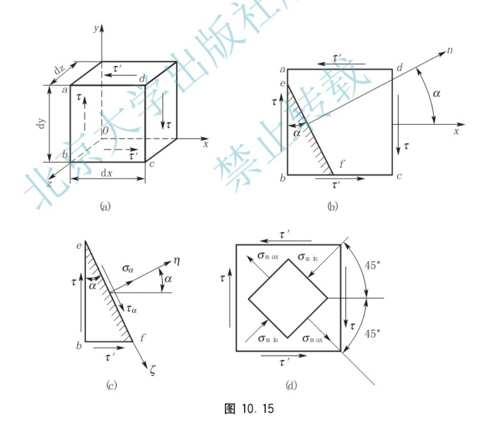


图 10.15

图 b 中的 ef 为垂直于前、后两平面的任一斜截面，斜截面的外向法线 n 与 x 轴间的夹角为 α，并规定从 x 轴到截面外向法线逆时针转动时 α 为正值，反之为负值。应用截面法，取左侧作为研究对象分析其平衡条件［图 10.15(c)］。设斜截面 ef 的面积为 $\mathrm{d}A$，则 eb 面和 bf 面的面积分别为 $\mathrm{d}A\cos\alpha$ 和 $\mathrm{d}A\sin\alpha$。选取坐标轴 ξ 和 η 分别与斜截面 ef 平行和垂直，列平衡方程

$$\sum F_\eta=0,\quad \sigma_\alpha dA+(\tau dA\cos\alpha)\sin\alpha+(\tau' dA\sin\alpha)\cos\alpha=0$$
$$\sum F_\xi=0,\quad \tau_\alpha dA-(\tau dA\cos\alpha)\cos\alpha+(\tau' dA\sin\alpha)\sin\alpha=0$$

由切应力双生互等定理可知 τ 与 τ' 数值相等，经整理后，可得任一斜截面 ef 上的正应力和切应力的计算公式分别为

$$\sigma_\alpha=-\tau\sin 2\alpha \tag{10-13}$$
$$\tau_\alpha=\tau\cos 2\alpha \tag{10-14}$$

这就是纯剪切单元体斜截面上的应力公式，也就是受扭杆斜截面上的应力公式。公式表明，受扭杆斜截面上既有正应力 σ_α，又有切应力 τ_α，它们都是斜角 α 的函数。

由式(10－13)可知，在 $\alpha=-45°$ 和 $\alpha=45°$ 两个斜截面上的正应力达到极值，分别为

$$\sigma_{-45°}=\sigma_{\max}=+\tau$$
$$\sigma_{45°}=\sigma_{\min}=-\tau$$

其中一个是拉应力，一个是压应力，其绝对值均等于 τ，而此时斜截面上的切应力均为零，如图 10.15(d)所示。

由式(10－14)可知，在 $\alpha=0°$ 和 $\alpha=90°$ 两个截面上的切应力达到极值，分别为

$$\tau_{0°}=\tau_{\max}=\tau$$
$$\tau_{90°}=\tau_{\min}=\tau'=-\tau$$

这表明原单元体的 4 个侧面上的切应力即为最大和最小切应力，它们的大小相等，符号相反，而此时截面上的正应力均为零。因此，受扭杆件横截面上的切应力就是所有斜截面中的最大者。

在圆杆的扭转试验中，像低碳钢这种抗剪强度低于抗拉强度的材料，在试件受扭达到破坏时，首先从外表面开始沿着横截面方向剪断[图 10.16(a)]。而像铸铁这种抗拉强度低于抗剪强度的材料，它的试件在受扭破坏时，是由杆的最外层沿与杆轴线约成 45°倾角的螺旋形曲面拉断的[图 10.16(b)]。

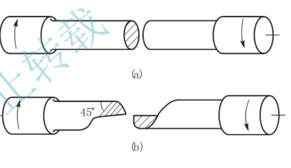


图 10.16

10.9 扭转角的计算・刚度条件

由 10.6 节中的式(a)和式(10－5)

$$\theta=\frac{d\varphi}{dx}$$
$$\theta=\frac{T}{GI_p}$$

得

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{T}{GI_p}$$

则

$$d\varphi=\frac{T}{GI_p}dx$$

对于截面不变的杆来说，式中 GI_p 是常数，若在杆长 l 范围内 T 不变，则可将上式两边积分，得

$$\int d\varphi = \int_l \frac{T}{GI_p} dx = \frac{T}{GI_p}\int_l dx$$

即

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} \tag{10-15}$$

此式即为计算扭转角的公式，式中 GI_p 称为杆的抗扭刚度。

由于杆在扭转时各横截面上的扭矩可能并不相同，且杆的长度也各不相同，因此，在工程中对于受扭杆件的刚度通常用相对扭转角沿杆长度的变化率，即单位长度扭转角 θ 来度量。

$$\theta = \frac{T}{GI_p} \leqslant [\theta] \tag{10-16}$$

其单位为 rad/m，以上计算公式都只适用于材料在线弹性范围内的等圆截面直杆。对于非等圆截面直杆，由于截面不存在极对称性，其变形和截面上的应力都比较复杂，无法用材料力学的方法求解，需借助于弹性力学来解决这些问题。

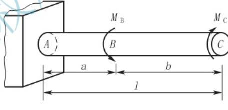


图 10.17

例 10.3　实心圆杆在 B、C 点受到扭矩作用，如图 10.17 所示。$M_B = 1592\text{N}\cdot\text{m}$，$M_C = 637\text{N}\cdot\text{m}$。$a = 300\text{mm}$，$b = 500\text{mm}$。轴的直径 $d = 70\text{mm}$，材料的切变模量 $G = 80\text{GPa}$。试计算：

（1）轴内最大切应力；

（2）C 面相对于 A 面的扭转角 φ_{AC}。

解：（1）由截面法可得 AB、BC 两段内的扭矩分别为 $T_{AB} = 955\text{N}\cdot\text{m}$，$T_{BC} = -637\text{N}\cdot\text{m}$。则最大切应力发生在 AB 杆横截面的周边。

$$\tau_{max} = \frac{T_{AB}}{W_{AB}} = \frac{16 \times 955}{\pi \cdot 0.07^3} = 14\text{MPa}$$

（2）φ_{AC} 的计算方法有两种，第一种是按位移叠加，即逐段相对扭转角相加，第二种是按各荷载单独作用产生的扭转角叠加。

方法 1
$$\varphi_{AB} = \frac{T_{AB}a}{GI_p} = \frac{955\text{N}\cdot\text{m} \times 0.3\text{m}}{80 \times 10^9\text{Pa} \times \frac{\pi}{32} \times (0.07\text{m})^4} = 1.52 \times 10^{-3}\text{rad}$$

$$\varphi_{BC} = \frac{T_{BC}b}{GI_p} = \frac{637\text{N}\cdot\text{m} \times 0.5\text{m}}{80 \times 10^9\text{Pa} \times \frac{\pi}{32} \times (0.07\text{m})^4} = 1.69 \times 10^{-3}\text{rad}$$

由于 B、C 相对于截面 A 的相对转动分别与扭转力偶矩 M_B、M_C 的转向相同，所以截面 C 相对于 A 的扭转角 φ_{AC} 为

$$\varphi_{AC} = \varphi_{BC} - \varphi_{AB} = 1.7 \times 10^{-4}\text{rad}$$

其转向与扭转力偶 M_C 相同。

方法 2　力偶矩 M_B、M_C 单独作用于杆 AC 时，均为让 C 面相对于 A 面产生扭转角，最后将两个力偶矩的作用进行叠加。

当 M_B 单独作用时

$$\varphi'_{AC}=\frac{M_B a}{GI_p}=\frac{1592\text{N}\cdot\text{m}\times0.3\text{m}}{80\times10^9\text{Pa}\times\frac{\pi}{32}\times(0.07\text{m})^4}=2.53\times10^{-3}\text{rad}$$

当 M_C 单独作用时

$$\varphi''_{AC}=\frac{M_C(a+b)}{GI_p}=\frac{637\text{N}\cdot\text{m}\times(0.3+0.5)\text{m}}{80\times10^9\text{Pa}\times\frac{\pi}{32}\times(0.07\text{m})^4}=2.70\times10^{-3}\text{rad}$$

M_B 单独作用时在 C 点产生的扭转角，与当 M_C 单独作用时在 C 点产生的扭转角方向相反，因此，C 点的扭转角 φ_{AC} 为

$$\varphi_{AC}=\varphi''_{AC}-\varphi'_{AC}=1.7\times10^{-4}\text{rad}$$

本章小结

1. 扭转的力学模型

构件特征：构件为等圆截面的直杆。

受力特征：外力偶矩的作用面与杆件的轴线相垂直。

变形特征：受力后杆件表面的纵向线变成螺旋线，即杆件任意两横截面绕杆件轴线发生相对转动。

2. 扭矩图的绘制

采用截面法求得受扭杆件各截面的内力，其扭矩 T 的符号作如下规定：采用右手螺旋法则，用四指表示扭矩的转向，大拇指的指向表示扭矩的矢量方向，矢量方向与截面的外法线方向相同时，该扭矩为正，反之为负。绘制时将正扭矩绘制于杆轴线的上方，负弯矩绘制于杆轴线的下方。若为竖杆则将正扭矩绘制于一侧，将负扭矩绘制于另一侧。

3. 功率、转速与扭矩之间的关系

$$M_e=\frac{60000P}{2\pi n}=9550\frac{P}{n}$$

4. 薄壁圆筒的扭转

薄壁圆筒：圆筒壁厚 δ 远小于平均半径 r_0。

横截面上的切应力：任一点的切应力值相等、方向与圆轴相切，其值为

$$\tau=\frac{T}{2A_0\delta}$$

式中 $A_0=\pi r_0^2$ 为平均半径所包围的面积。

相对扭转角：圆筒两横截面间绕筒相对转动的角度。

切应变：直角的改变量，记为 γ。

切应力双生互等定理：两相互垂直平面上的切应力 τ 和 τ' 数值相等、方向均指向(或背离)该两平面的交线。

剪切胡克定律：在切应力不超过材料的剪切比例极限情况下，即材料处于线弹性范围内，τ 与 γ 成正比关系，即 $\tau=G\gamma$。

5. 等直圆杆扭转时的应力和强度条件

切应力分布规律：横截面上任一点处的切应力，其方向与该点所在的半径相垂直，其数值与该点到圆心的距离成正比。

切应力公式：横截面上距圆心为 ρ 的任一点处的切应力为

$$\tau_{\rho}=\frac{T\rho}{I_{\mathrm{p}}}$$

横截面上的最大切应力发生在横截面周边的各点处，其值为

$$\tau_{\max}=\frac{Tr}{I_{\mathrm{p}}}=\frac{T}{W_{\mathrm{p}}}$$

强度条件：圆杆横截面上的最大切应力不得超过材料的许用切应力

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_{\mathrm{p}}}\leqslant[\tau]$$

6. 等直圆杆扭转时的变形和刚度条件

扭转变形：圆杆扭转时，任意两横截面之间产生绕杆件轴线的相对转角，称为相对扭转角。其计算公式为

$$\varphi=\frac{Tl}{GI_{\mathrm{p}}}$$

单位长度相对扭转角：相距为单位长度的两横截面的相对扭转角。

$$\theta=\frac{T}{GI_{\mathrm{p}}}$$

扭转时的角位移：圆杆扭转时，任一横截面绕杆件轴线的转角，称为扭转角。

刚度条件：圆轴扭转时的单位长度扭转角不得超过规定的许可值。

$$\theta=\frac{T}{GI_{\mathrm{p}}}\leqslant[\theta]$$

思 考 题

1. 薄壁圆筒纯扭转时，如果在其横截面及径向截面上存在有正应力，那么取出的分离体能否平衡？

2. 图 10.18 所示单元体，已知右侧面上有与 y 方向成 θ 角的切应力 τ，试根据切应力互等定理，画出其他面上的切应力。

3. 由实心圆杆 1 及空心圆杆 2 组成的受扭圆轴，如图 10.19 所示。假设在扭转过程中两杆无相对滑动，若(a)两杆材料相同，即 $G_1=G_2$；(b)两杆材料不同，$G_1=2G_2$；试绘出横截面上切应力沿水平直径的变化情况。

4. 长为 l、直径为 d 的两根由不同材料制成的圆轴，在其两端作用相同的扭转力偶矩 M_{e}，试问：

(1) 最大切应力 $\tau_{\max}$ 是否相同？为什么？

（2）相对扭转角 φ 是否相同？为什么？

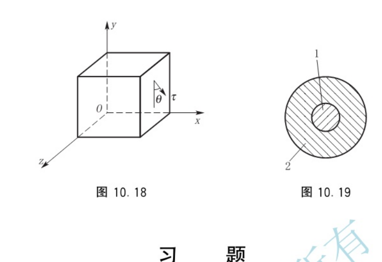


图 10.18　　　　图 10.19

习　　题

10－1　如图 10.20 所示，一传动轴做匀速运动，转速 $n=200\text{r/min}$，轴上装有 5 个轮子，主动轮Ⅱ输入的功率为 60kW，从动轮Ⅰ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ依次输出 12kW、22kW、18kW 和 8kW。试作轴的扭矩图。

10－2　如图 10.21 所示，一钻探机的功率为 10kW，转速 $n=180\text{r/min}$。钻杆钻入土层的深度 $l=40\text{m}$。如土壤对钻杆的阻力可看作是均匀分布的力偶，试求分布力偶的集度 m，并作钻杆的扭矩图。

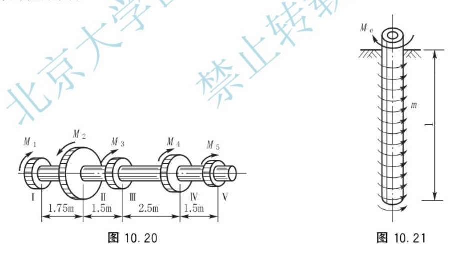


图 10.20　　　　图 10.21

10－3　图 10.22 所示薄壁圆管，受力偶矩 $M_e=1000\text{N}\cdot\text{m}$ 的作用。已知，圆管外径 $D=80\text{mm}$，内径 $d=72\text{mm}$。试求横截面上的切应力。

10－4　图 10.23 所示一齿轮传动轴，传递力偶矩 $M_e=10\text{kN}\cdot\text{m}$，轴的直径 $d=80\text{mm}$。试求轴的最大切应力。



图 10.22　　　　图 10.23

10－5 如图 10.24 所示，T 为圆杆横截面上的扭矩，试画出截面上与 T 对应的切应力分布图。

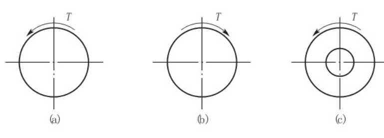


图 10.24

10－6 如图 10.25 所示，实心圆轴的直径 $d=100\text{mm}$，长 $l=1\text{m}$，其两端所受外力偶矩 $M_e=14\text{kN}\cdot\text{m}$，材料的切变模量 $G=80\text{GPa}$。试求：

(1) 最大切应力及两端截面间的相对扭转角；

(2) 图示截面上 A、B、C 3 点处切应力的数值及方向；

(3) C 点处的切应变。

10－7 发电量为 15000kW 的水轮机主轴如图 10.26 所示。$D=550\text{mm}$，$d=300\text{mm}$，正常转速 $n=250\text{r/min}$。材料的许用切应力 $[\tau]=50\text{MPa}$。试校核水轮机主轴的强度。

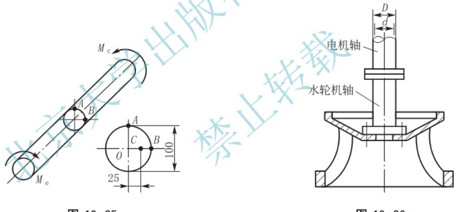


图 10.25　　图 10.26

10－8 直径 $d=50\text{mm}$ 的等圆截面直杆，在自由端截面上承受外力偶矩 $M_e=6\text{kN}\cdot\text{m}$，而在圆杆表面上的 A 点将移动到 A_1 点，AA_1 的圆弧长度为 $\Delta s=3\text{mm}$，如图 10.27 所示。圆杆材料的弹性模量 $E=210\text{GPa}$，试求泊松比 μ。

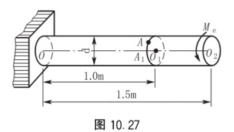


图 10.27

10－9 直径 $d=25\text{mm}$ 的钢圆杆，受轴向拉力 60kN 作用时，在标距为 200mm 的长度内伸长了 0.113mm。当其承受一对扭外力偶 $M_e=0.2\ \text{kN}\cdot\text{m}$ 时，在标距为 200mm 的长度内相对扭转了 0.732°的角度。试求钢材的弹性常数 E、G 和 μ。

10－10 图 10.28 所示等直圆杆，已知外力偶矩 $M_A=2.99\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_B=7.20\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_C=4.21\text{kN}\cdot\text{m}$，许用切应力 $[\tau]=70\text{MPa}$，许可单位长度扭转角 $[\varphi']=1°/\text{m}$，切变模量 $G=80\text{GPa}$。试确定该轴的直径 d。

10－11 如图 10.29 所示阶梯形圆杆，AE 段位空心，外径 $D=140\text{mm}$，内径 $d=$

100mm；BC 段为实心，直径 d＝100mm。外力偶矩 M_A＝18kN·m，M_B＝32kN·m，M_C＝14kN·m。已知：$[\tau]$＝80MPa，$[\varphi']$＝1.2°/m，G＝80GPa。试校核该轴的强度和刚度。

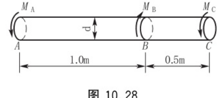


图 10.28

图 10.29

10－12　图 10.30 所示一圆截面杆，左端固定，右端自由，在全长范围内受均布力偶矩作用，其集度为 m_e，材料的切变模量为 G，截面的极惯性矩为 I_p，杆长为 l。试求自由端的扭转角 φ_B。

10－13　如图 10.31 所示钻头横截面直径为 20mm，在顶部受均匀的阻抗扭矩 m(N·m/m) 的作用，许用切应力 $[\tau]$＝70MPa(图中单位：mm)。

(1) 求许可的 M_e。

(2) 若 G＝80GPa，求上端对下端的相对扭转角。

10－14　图 10.32 所示一圆锥形杆 AB，受力偶矩 M_e 作用，杆长为 l，两端截面的直径分别为 d_1 和 d_2＝1.2d_1，材料的切变模量为 G。试求：

(1) 截面 A 相对 B 的扭转角 φ_{AB}；

(2) 若按平均直径的等直杆计算扭转角，误差等于多少？

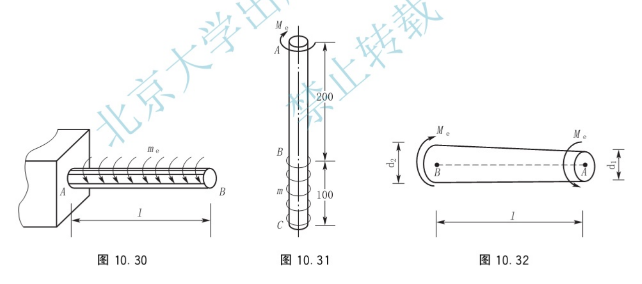


图 10.30　　图 10.31　　图 10.32

第11章 弯曲内力

【教学目标】

本章主要介绍梁在平面弯曲情况下的内力计算方法及内力图的绘制。

【学习要求】

了解受弯杆件简化方法，掌握梁的内力计算方法，熟练绘制剪力图、弯矩图，掌握荷载集度、剪力、弯矩间的关系并用于绘制剪力、弯矩图，了解叠加法做内力图。

11.1 工程实际中的弯曲问题

工厂车间里的桥式起重机的大梁承受自重和它所起吊重物的重力，如图 11.1 所示；机车车厢的轮轴承受车厢的压力和钢轨的约束力，如图 11.2 所示；汽轮机叶片承受高压高速蒸汽的作用，如图 11.3 所示；造纸机上的压榨辊受到轧制压力的作用，如图 11.4 所示。这些构件(杆件)的受力和变形特点是：在力偶或垂直于轴线的横向力作用下，原为直线的轴线弯成了曲线，构件的这种变形称为弯曲变形。工程中，凡是以弯曲变形为主的构件通常称为梁。

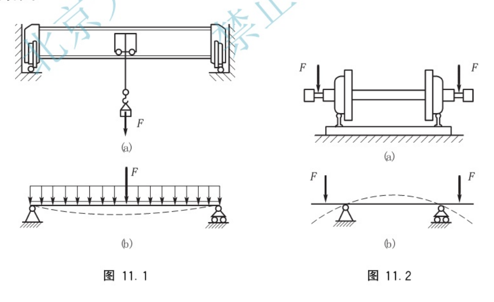


图 11.1　　图 11.2

工程中常用的梁的横截面都至少有一根对称轴，如图 11.5 所示的截面。对称轴与梁轴线所组成的平面称为纵向对称面，如图 11.6 所示的阴影面。如果外力位于该平面内，则梁的轴线将在这个纵向对称面内弯曲成一条平面曲线，这种弯曲称为平面弯曲。平面弯曲是最基本、最简单的，也是工程中最常见到的一种弯曲形式，也称为对称弯曲。本章只对平面弯曲的内力进行研究。

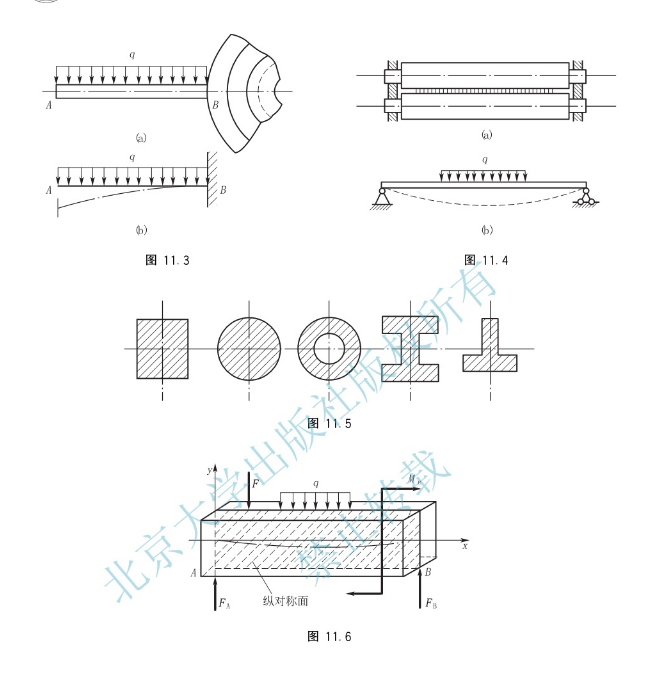


图 11.3

图 11.4

图 11.5

图 11.6

11.2 梁的荷载和支座反力

梁的荷载和支座有各种情况，比较复杂，必须作一些简化才能得出计算简图。下面就荷载及支座的简化分别进行讨论。

1. 荷载的简化

作用在梁上的外力，是各种各样的，经简化和抽象归纳起来可分为集中力［图 11.7(a)］、集中力偶［图 11.7(b)］和分布力［图 11.7(c)、(d)］。

当外力作用的范围远小于梁轴线长度时，可将外力看做是作用于一点处的集中力，如火车车轮对钢轨的压力［图 11.2(b)］等；若外力的作用在一定范围内，如起重机的大梁承受自重［图 11.1(b)］，造纸机上的压榨辊受到轧制压力的作用［图 11.3(b)］

等，这些外力都是沿着梁轴线方向分布的，其分布范围与梁的轴向长度是同一数量级，故不能简化成集中力，而必须抽象为分布力。分布力又可分为均匀分布和任意函数分布，工程中最常见的是均匀分布和线性分布。分布力的集度 q 常用单位是牛顿/米（N/m）或千牛顿/米（kN/m）。

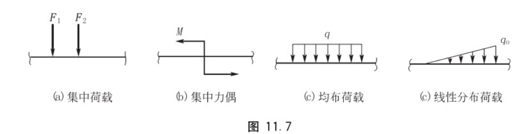


图 11.7

2. 支座的简化

梁支座的形式虽然各不相同，但根据它所能提供的约束反力，可简化为以下 3 种典型类型。

（1）可动铰支座。这种支座的简化图如图 11.8(a)所示，它只能阻止在支座处的截面沿梁的横向移动，但不能阻止其沿纵向地移动和绕横向轴地转动。因此，这种支座对梁只有一个约束，相应的只可能有一个横向支反力［图 11.8(d)］，其作用线垂直于梁的轴线。

（2）固定铰支座。这种支座的简化图如图 11.8(b)所示。它能阻止在支座处的截面沿梁的纵向和横向地移动，但不能阻止其绕横向轴地转动。因此，这种支座对梁有两个约束，相应的可能有沿梁纵向和横向的两个支反力［图 11.8(e)］。

（3）固定端。这种支座的简化图如图 11.8(c)所示。它使梁在该端的截面既不能作任何移动又不能作转动。因此，这种支座对梁有三个约束，相应的可能有 3 个支反力，即沿梁纵向和横向的两个支反力和一个支反力偶［图 11.8(f)］。

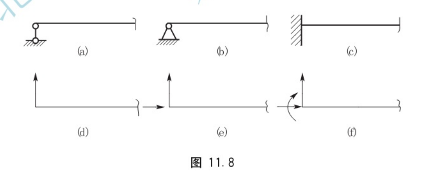


图 11.8

3. 静定梁的基本形式

由上述可知，如果梁具有一个固定端，或者有一个固定铰支座和一个可动铰支座，则可以保证梁在载荷作用下不至发生整体运动而处于平衡状态。此时，梁将可能有 3 个支反力。由于荷载和各支反力构成平面力系，故 3 个支反力可用平面一般力系的 3 个静力平衡方程求出，这种梁称为静定梁。常见的静力梁如图 11.9(a)、(b)、(c)所示，它们分别称为简支梁、外伸梁和悬臂梁。

有时为了改善梁的强度和刚度的需要，可设置较多的支座［图 11.9(d)、(e)］，于是

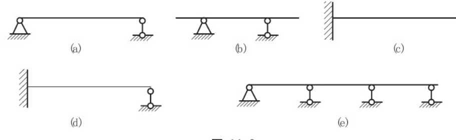


图 11.9

支反力的数目超过了 3 个，这样就不能单凭静力平衡方程来求出全部支反力，这种梁称为超静定梁。求解这类梁的支反力时，需要考虑梁的变形，建立变形协调方程。

梁在两支座之间的部分称为跨，其长度称为梁的跨度。

将实际的梁、梁上载荷及支座简化以后，就得到梁的计算简图，在作出梁的计算简图后，即可按平衡方程计算梁的支反力。

11.3 梁的内力及其求法

梁在外力作用下，其各部分之间将产生互相作用的内力。为了研究梁的应力和变形，首先要从已知的外力求出梁横截面上的内力。现以受集中载荷作用的简支梁(图 11.10)为例，来说明梁在外力作用下所产生的反力和内力的计算。

为了分析内力，一般须先用平衡方程分别求得支反力 F_{Ay} 和 F_{By}，其指向如图 11.10(a)所示。

计算梁的内力时，仍用截面法。例如在求距离左支座 A 为 x 的横截面 $m-m$ 上的内力对，应沿该截面假想地将梁截分成两部分［图 11.10(b)，(c)］，现首先研究左段梁［图 11.10(b)］的平衡。因为此段梁上有向上的外力 F_{Ay}，故在截面 $m-m$ 内必有铅垂向下的内力 F_S［图 11.10(b)］。由平衡方程

$$\sum F_y=0, \quad F_{Ay}-F_S=0$$

得 $$F_S=F_{Ay}$$

F_S 称为横截面 $m-m$ 上的剪力，它是与横截面相切的分布内力系的合力。由于剪力 F_S 与外力 F_{Ay} 构成力偶，显然，为了使此梁段不发生整体转动而保持平衡，在截面 $m-m$ 上必然还有一个内力偶 M［图 11.10(b)］。此内力偶的矩也用 M 表示，以截面 $m-m$ 的形心 C 为矩心由平衡方程

$$\sum M_C=0, \quad M-F_{Ay}x=0$$

得 $$M=F_{Ay}x$$

由作用力与反作用力原理可知，右段梁的截面 $m-m$ 上必然同时存在有剪力和弯矩，其数值与前述的相同，而剪力的指向和弯矩的转

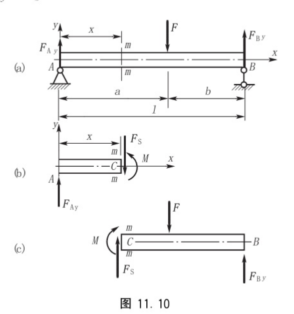


图 11.10

向则与左段梁的相反［图 11.10(c)］。这一结论也可从右段梁的平衡方程得到。

为了使从截开后的两段梁所求得的同一横截面上的剪力和弯矩各自具有相同的正负号，把剪力和弯矩的符号规则与梁的变形联系起来。为此，在横截面 $m-m$［图 11.10(a)］处取出长为 dx 的微段(图 11.11)，作这样的规定：剪力以使微段发生左端向上和右端向下的相对错动时为正；或使微段顺时针方向转动的剪力为正［图 11.11(a)］，反之为负[图 11.11(b)]；弯矩以使微段发生上凹下凸的弯曲时为正；或使梁的上表面纤维受压时的弯矩为正［图 11.11(c)］，反之为负［图 11.11(d)］。按照上述规定，图 11.10(b)、(c)中所示的剪力和弯矩都是正的。

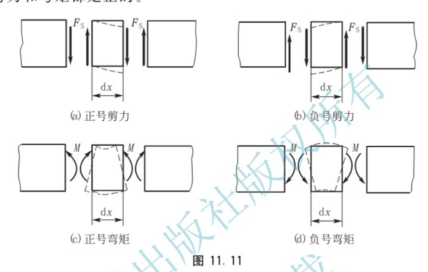


图 11.11

按上述关于符号的规定，任意截面上的剪力和弯矩，无论根据这个截面左侧或右侧的外力来计算，所得结果的数值和符号都是一样的。另外，还可以得到下述两个规律。

(1) 横截面上的剪力，在数值上等于作用在此截面任一侧(左侧或右侧)梁上所有外力在 y 轴上投影的代数和。

(2) 横截面上弯矩，在数值上等于作用在此截面任一侧(左侧或右侧)梁上所有外力对该截面形心力矩的代数和。

为了使所求得的剪力和弯矩的符号符合前述规定，按此规律列剪力计算式时，凡截面左侧梁上所有向上的外力，或截面右侧梁上所有向下的外力，都将产生正的剪力，故均取正号，反之为负。在列弯矩计算式时，凡截面左侧梁上外力对截面形心之矩为顺时针转向，或截面右侧梁上外力对截面形心之矩为逆时针转向，都将产生正的弯矩，故均取正号，反之为负。这个规则可以概括为“左上右下，剪力为正；左顺右逆，弯矩为正”的口诀。

利用上述规律，在求弯曲内力时，可不再列出平衡方程，而是直接根据截面左侧或右侧梁上的外力来确定横截面上的剪力和弯矩，从而简化的求内力的计算步骤。

例 11.1 如图 11.12 所示，外伸梁桥受集中力偶 qa^2 和均布荷载 q 作用。试求 C 截面上的剪力和弯矩。

解：(1) 计算支座反力。选梁整体为研究

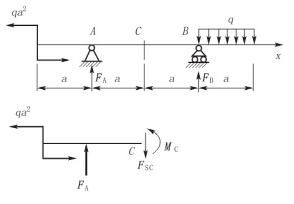


图 11.12

对象，由平衡方程

$$\sum M_B=0,\quad qa^2-F_A 2a-\frac{1}{2}qa^2=0$$

得
$$F_A=\frac{1}{4}qa$$

$$\sum F_y=0,\quad F_A+F_B-qa=0$$

得
$$F_B=\frac{3}{4}qa$$

(2) 计算 C 截面上的剪力和弯矩

假想在 C 截面截开，取左梁段为研究对象，根据左梁段上的外力，可直接求得

$$F_{SC}=F_A=\frac{1}{4}qa$$

$$M_C=-qa^2+F_A a=-qa^2+\frac{1}{4}qa^2=-\frac{3}{4}qa^2$$

11.4 内 力 图

前面研究了求解梁任一横截面上内力的方法，一般情况下梁横截面上的剪力和弯矩是随着横截面的位置变化的。若横截面位置用沿梁轴线的坐标 x 表示，则梁各个横截面上剪力和弯矩可以表示为坐标 x 的函数，即

$$F_S=F_S(x)$$
$$M=M(x)$$

上述二式分别称为剪力方程和弯矩方程。为了全面了解剪力和弯矩沿着梁轴线的变化情况，可根据剪力方程和弯矩方程，用曲线把它们表示出来。x 坐标表示横截面的位置，剪力 F_S 值或弯矩 M 值为纵坐标，所得图形分别称为剪力图和弯矩图。

根据剪力图和弯矩图，可以很直观地找出梁内最大剪力和最大弯矩所在的横截面及数值，从而可以进行梁的强度分析和计算。

例 11.2 图 11.13(a)所示为一简支梁，在 C 点处受集中力 F 作用。作此梁的剪力图和弯矩图。

解：(1) 计算支座反力。考虑梁的整体平衡，根据平衡方程 $\sum M_B=0$，得

$$F_A=\frac{Fb}{l}$$

再由 $\sum M_A=0$，得

$$F_B=\frac{Fa}{l}$$

(2) 列出剪力方程和弯矩方程。

外力 F 将梁分成 AC 和 BC 两段，梁在该两段内的内力是不同的，因此，梁的剪力和弯矩不能用同一方程

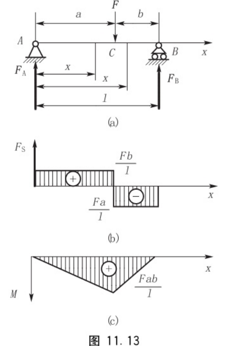


图 11.13

式来表示，应分段列出。

AC 段：

$$F_S(x)=F_A=\frac{Fb}{l} \quad (0<x<a) \tag{a}$$

$$M(x)=\frac{Fb}{l}x \quad (0\leqslant x\leqslant a) \tag{b}$$

BC 段：

$$F_S(x)=F_A-F=\frac{Fb}{l}-F=-\frac{Fa}{l} \quad (a<x<l) \tag{c}$$

$$M(x)=F_Ax-F(x-a)=\frac{Fb}{l}x-F(x-a)=\frac{Fa}{l}(l-x) \quad (a\leqslant x\leqslant l) \tag{d}$$

(3) 绘制剪力图和弯矩图。

由式(a)、(c)可知，剪力是常数，因此，AC 和 BC 段的剪力图是一条平行于坐标轴的水平线，如图 11.13(b)所示。

由式(b)、(d)可知，弯矩图为直线方程，因此，AC 和 BC 段的弯矩图是一条斜直线。

AC 段：在 $x=0$ 处，$M_A=0$；在 $x=a$ 处，$M_C=\frac{Fab}{l}$；

BC 段：在 $x=a$ 处，$M_C=\frac{Fab}{l}$；在 $x=l$ 处，$M_B=0$。

弯矩图如图 11.13(c)所示。

从整个梁的剪力图和弯矩图可以看出，当 $a>b$ 时，梁的最大剪力 $F_{Smax}=\frac{Fa}{l}$ 发生在 BC 段；$M_{max}=\frac{Fab}{l}$，发生在集中力 F 所作用的横截面上。

例 11.3 简支梁受集度为 q 的均布载荷作用，如图 11.14(a)所示，试列出梁的剪力方程和弯矩方程，并作出梁的剪力图和弯矩图。

解： (1) 求支座反力。

根据梁的对称关系，可知两个支座反力相等，即

$$F_A=F_B=\frac{1}{2}ql$$

(2) 列剪力方程和弯矩方程。

任取一距 A 为 x 的截面，则

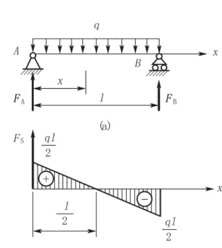
$$F_S(x)=F_A-qx=\frac{1}{2}ql-qx \quad (0<x<l) \tag{a}$$

$$M(x)=F_Ax-\frac{1}{2}qx^2=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2 \quad (0\leqslant x\leqslant l) \tag{b}$$

(3) 作剪力图和弯矩图。

根据式(a)可知，剪力方程为一直线方程，计算两点的值即可作出剪力图。即

$$x=0, \quad F_S=\frac{1}{2}ql;$$



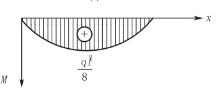


图 11.14

$$x=l, \quad F_S=-\frac{1}{2}ql$$

剪力图如图 11.14(b)所示。

根据式(b)可知，弯矩方程为一抛物线方程，需计算出 3 个主要点的值。即

$$x=0, \quad M=0;$$
$$x=l, \quad M=0;$$
$$x=\frac{1}{2}l, \quad M=\frac{1}{8}ql^2$$

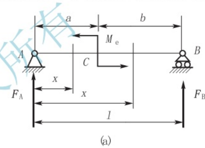
用光滑曲线连接各点，弯矩图如图 11.14(c)所示。

(4) 求 F_{Smax} 和 M_{max}。

由剪力图和弯矩图可知，在接近 A、B 两个支座的两端面上有 F_{Smax}，其绝对值为 $\left|\frac{1}{2}ql\right|$；式(b)表明，弯矩是 x 的二次函数，欲求弯矩的最大值，可根据高等数学求极值的方法，得

$$\frac{dM(x)}{dx}=\frac{1}{2}ql-qx=0$$

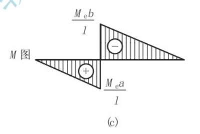
从而求得 $x=\frac{1}{2}l$ 处弯矩有极值，其极值为 $M_{max}=\left|\frac{1}{8}ql^2\right|$，其对应截面上的剪力 $F_S=0$。



(a)

F_S图

(b)



(c)

图 11.15

例 11.4 一简支梁桥受到集中力偶 M_e 作用，如图 11.15(a)所示。试作此梁的剪力图和弯矩图，并确定 $|F_S|_{max}$ 和 $|M|_{max}$。

解：(1) 求支座反力。

根据平衡方程 $\sum M_B=0$ 和 $\sum M_A=0$，可得

$$F_A=\frac{M_e}{l}(\uparrow), \text{和 } F_A=-\frac{M_e}{l}(\downarrow)$$

由平面力偶系的平衡条件可知，两个支座反力必构成一个反向力偶与原集中力偶平衡，由此也可得 F_A 和 F_B 大小相等，但方向相反。

(2) 列出剪力方程和弯矩方程。

因为梁上只作用一个力偶，而力偶在任何方向的投影皆为零，故无论哪个截面上的剪力都只能由 F_A 或 F_B 来计算。全梁只有一个剪力方程，即

$$F_S(x)=\frac{M_e}{l} \quad (0<x<l)$$

因为集中力偶在 AC 和 BC 段引起的弯矩不同，因此，弯矩方程必须分段列出

AC 段：$M(x)=F_Ax=\frac{M_e}{l}x \quad (0\leqslant x<a)$

BC 段：$M(x)=F_Ax-M_e=\frac{M_e}{l}x-M_e \quad (a<x\leqslant l)$

(3) 作剪力图和弯矩图。

由剪力方程可知，全梁剪力为常数，即 $F_S=\frac{M_e}{l}$。当 AC 段和 BC 段的弯矩方程可知，两段梁的弯矩图都为斜直线

AC 段：$x=0$，　$M=0$；　$x=a$，　$M=\frac{M_e}{l}a$

BC 段：$x=a$，　$M=-\frac{M_e}{l}b$

由图 10.15 (b) 可知，$F_{S\max}=\frac{M_e}{l}$，由图 11.15 (c)可知，当 $a<b$ 时，$|M|_{\max}=\frac{M_e}{l}b$，位于 C 截面稍右的截面上。由弯矩图还可以看到一个现象，在集中力偶作用的截面 C 处，弯矩值发生的突变，突变值等于外力偶矩 M_e。

11.5 弯矩、剪力、荷载集度间的关系

在例 11.3 中，若将弯矩方程 $M(x)$对 x 求导数，就得到剪力方程 $F_S(x)$；若再将 $F_S(x)$对 x 求导数，则得到分布载荷集度。实际上，在分布载荷集度、剪力和弯矩之间存在着一个普遍的微分关系，利用这种关系，可以很方便地绘制或校核剪力图和弯矩图。

11.5.1 荷载集度、剪力和弯矩间的微分关系

现以简支梁左端为坐标原点选取坐标系，如图 11.16(a)所示。梁上分布载荷集度 q 是 x 的连续函数，并规定方向向上为正。在分布载荷作用段任一截面处截取微段梁 dx 进行讨论，因为 dx 很微小，故可视其上的分布载荷为均匀，微段的受力如图 11.16 (b)所示。考虑微段的平衡，有

$$\sum F_y=0,\quad F_S+q\mathrm{d}x-(F_S+\mathrm{d}F_S)=0$$

整理后得

$$\frac{\mathrm{d}F_S}{\mathrm{d}x}=q \qquad (11-1)$$

再取微段梁右端面形心为矩心，由平衡方程

$$\sum M_O=0,\quad -M-F_S\mathrm{d}x-\frac{1}{2}q(\mathrm{d}x)^2+(M+\mathrm{d}M)=0$$

略去二阶微量后得到

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=F_S \qquad (11-2)$$

(a)

(b)

图 11.16

将式(11-2)再对 x 求一次导数，并考虑式(11-1)可得

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}F_S}{\mathrm{d}x}=q \qquad (11-3)$$

以上 3 式就是梁任一截面上的荷载集度、剪力和弯矩间的微分关系。

11.5.2 用荷载集度、剪力和弯矩间的微分关系绘制剪力图和弯矩图

利用式(11-1)～式(11-3)，结合梁上载荷的具体情况，可以得出关于剪力图和弯矩图的变化规律，依据这些规律可以更简捷地绘制或校核剪力图和弯矩图。

(1) 若在梁的某一段内无载荷作用，即 $q=0$，由 $\frac{dF_S}{dx}=q=0$ 可知，在这一段梁内 $F_S=$常数，即剪力图必然是平行于 x 轴的直线，如图 11.13(b)、图 11.15(b)所示。又由 $\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{dF_S}{dx}=q=0$可知，$M$ 是 x 的一次函数，弯矩图是斜直线，如图 11.13(c)、图 11.15 (c)所示。

(2) 若在梁的某一段内作用均布载荷，即 $q=$常数，则 $\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{dF_S}{dx}=q=$常数。故在这一段梁内 F_S是 x 的一次函数，而 M 是 x 的二次函数，因而剪力图是斜直线，弯矩图是二次抛物线，如图 11.14(b)、(c)所示。

若在梁的某一段内，分布载荷方向向上，即$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{dF_S}{dx}=q>0$，则对应的弯矩图向上凸；反之，分布载荷方向向下，则弯矩图向下凸，如图 11.14(c)所示。

(3) 若在梁的某一截面上 $F_S=0$，即$\frac{dM}{dx}=F_S=0$，则对应的弯矩图的斜率为零，在这一截面上弯矩有极值。例如在图 11.14 中，跨度中点截面上的 $F_S=0$，弯矩为最大值$M_{max}=\frac{1}{8}ql^2$。

(4) 在集中力作用处，剪力 F_S 有一突变(其变化的数值等于集中力)，因而对应截面弯矩图的斜率也发生了突变，出现了转折点，如图 11.13(c)所示。

在集中力偶作用处，对应截面的弯矩图将发生突变，突变值即等于力偶矩的大小，如图 11.15(c)所示。

(5) $|M|_{max}$不但可能发生在 $F_S=0$ 的截面上，也有可能发生在集中力作用处 [11.13(c)]，或集中力偶作用处 [11.15(c)]。所以，在求$|M|_{max}$时，应考虑上述几种可能性。

将上述的均布荷载、剪力和弯矩之间的关系以及剪力图、弯矩图的一些特征汇总整理为表 11-1，以供参考。

表 11-1 直梁内力图的形状特征

梁上情况	无荷载作用段	均布荷载 q 作用段		集中力 F 作用处		集中力偶 M 作用处
剪力图	水平线	斜直线	为零处	有突变(突变值$=F$)	如变号	无变化
弯矩图	一般为斜直线	抛物线(凸出方向同 q 指向)	有极值	有尖角(尖角指向同指 F 向)	有极值	有突变(突变值$=M$)

11.5.3 绘制内力图的一般步骤

(1) 求反力(悬臂梁可不求反力)。

(2) 分段。凡外力不连续点均应作为分段点，如集中力及集中力偶作用点、均布荷载

的起讫点等。这样，根据外力情况就可以判定各段梁的内力图形状。

（3）定点。根据各段梁的内力图形状，选定所需的控制截面，用截面法求出这些截面的内力值，并在内力图的基线上用竖标绘出。这样，就定出了内力图上的各控制点。

（4）连线。根据各段梁的内力图形状，将其控制点以直线或曲线相连。

例 11.5 如图 11.17(a)所示外伸梁，受集中力偶和均布荷载作用，试作梁的剪力图和弯矩图。

解：（1）求支座反力。

设 F_A，F_B 为图示方向，根据平衡方程

$$\sum M_B=0，得\ F_A=\frac{1}{2}qa\ (\uparrow)$$

$$\sum F_y=0，得\ F_B=\frac{3}{2}qa\ (\uparrow)$$

（2）作剪力图。

将梁体划分为 CA、AB 两段，C 处集中力偶对剪力图无影响，CA 段无荷载作用，剪力为零，A 处剪力图有突变，突变值为 F_A，AB 段上作用均布荷载，为斜直线。

利用截面法，求得各控制截面的剪力值

$$F_{SC}=0$$

$$F_{SA}^{+}=F_A=\frac{1}{2}qa（“A^{+}”表示\ A\ 截面偏右）$$

$$F_{SB}=F_A-2qa=-\frac{3}{2}qa$$

$$F_{SB}^{-}=-F_B=-\frac{3}{2}qa$$

$$F_{SB}^{+}=0$$

根据各段梁的剪力图形状，将各控制点间连线即得到剪力图，如图 11.17(b)所示。

（3）作弯矩图。

将梁体划分为 CA、AB 两段，C 处作用集中力偶，弯矩图有突变，突变值为力偶值，CA 段剪力图为零，则弯矩图为水平线，AB 段上作用均布荷载，为抛物线，凸起同 q 指向。

利用截面法，求得各控制截面的弯矩值

$$M_C^{-}=0$$

$$M_C^{+}=qa^2$$

$$M_B=0$$

为了求出最大弯矩值 M_{max}，应确定剪力为零的截面 D 的位置，应为距 A 端 $\frac{1}{2}a$ 处，求得 $M_{max}=\frac{9}{8}qa^2$。

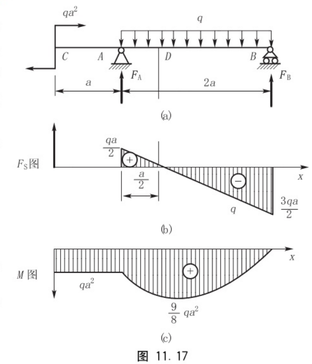


图 11.17

最后根据各段梁的弯矩图形状，将各控制点间连线得弯矩图，如图 11.17(c)所示。

例 11.6 一外伸梁受均布荷载和集中力偶的作用，如图 11.18 所示，试作此梁的剪力图和弯矩图。

解：(1) 求支座反力。

由平衡方程

$$\sum M_A=0，得\ F_B=-15\text{kN}(\downarrow)$$

$$\sum F_y=0，得\ F_A=35\text{kN}(\uparrow)$$

(2) 作剪力图。

将梁体划分为 CA、AD、DB 3 段。

利用截面法，求得各控制截面的剪力值

$$F_{SC}=0$$

$$F_{SA}^{-}=20\times1=-20\text{kN}$$

$$F_{SA}^{+}=-20\times1+35=15\text{kN}$$

然后，即可绘出剪力图，如图 11.18(b)所示。

(3) 作弯矩图。

利用截面法，求得各控制截面的弯矩值

$M_C=0$

$M_A=-20\times0.5=-10\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_D^{-}=-20\times1.5+35\times1=5\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_D=-15\times1=-15\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_B=0$

然后，即可绘出剪力图，如图 11.18(c)所示。全梁的最大值 $|M|_{max}=15\text{kN}\cdot\text{m}$ 发生在 D 截面偏右。

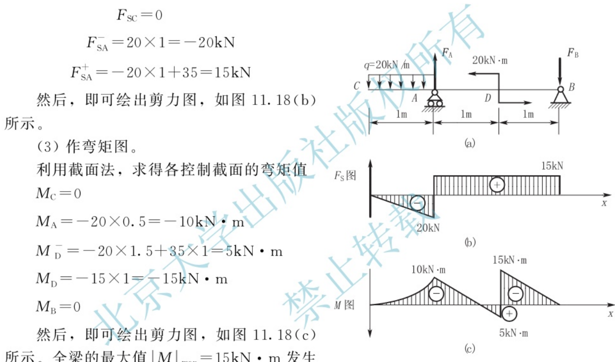


图 11.18

11.6 叠加法作内力图

材料力学中的叠加原理叙述如下：由几个荷载共同作用下所引起的某一物理量(如内力、应力、应变和变形)，等于每一个荷载单独作用下所引起的该物理量的叠加。叠加原理在材料力学中应用很广。应用叠加原理的一般条件为：需要计算的某一物理量(如内力、应力、变形等)必须是荷载的线性齐次式。

在材料力学中，当材料服从胡克定律，且构件的变形为小变形时，则构件在外荷载作用下，其内力、应力、应变和变形大多是荷载的线性函数，故此时叠加原理便适用。下面通过例题介绍一下叠加法作弯矩图的具体步骤，即当梁上有几个荷载共同作用时，可以先分别画出每一荷载单独作用时梁的弯矩图，然后将同一截面相应的各纵坐标代数叠加，即得到梁在所有荷载共同作用下的弯矩图。

例 11.7 图 11.19(a)所示的简支梁桥受均布荷载 q 和集中力 P 共同作用。若已知 $P=ql$，试按叠加法作梁的弯矩图。

解： 首先把梁上的荷载分成均布荷载载 q 和集中力 P 单独作用(图 11.19(b)、(c))，然后分别画出 q 和 P 单独作用时的弯矩图(图 11.19(e)、(f))。将相应的纵坐标叠加，就得到 q 和 P 共同作用时的弯矩图(图 11.19(d))。

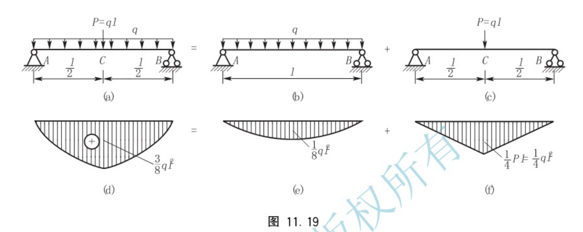


图 11.19

例 11.8 用叠加法作图 11.20(a)所示梁的弯矩图。

解： 首先把梁上的荷载分成均布荷载载 q 和集中力 P 单独作用 [图 11.19(b)、(c)]，作出弯矩图 [图 11.20(e)、(f)]，然后将 q 和 P 引起的弯矩图相应的纵坐标叠加，就得到 q 和 P 共同作用时的弯矩图 [图 11.19(d)]。

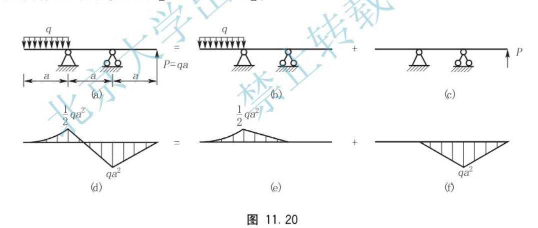


图 11.20

这种做法把一个复杂的问题化为几个简单问题的叠加，这给我们解题带来很大的方便。

本章小结

1. 平面弯曲的概念(平面弯曲的力学模型)

构件特征：至少具有一个纵向对称面的等截面直杆；

受力特征：外力偶或横向力作用在杆的纵向对称面内，横向力与杆轴线垂直；

变形特征：弯曲变形后，杆件轴线变成在外力作用面内的光滑、平坦的平面曲线。

2. 平面弯曲时横截面上的内力—剪力和弯矩

剪力：构件弯曲变形时，与横截面相切的分布力系的合力，用 F_S 表示；

弯矩：构件弯曲变形时，垂直作用于横截面的分布内力系的合力偶矩，用 M 表示；

剪力方程与弯矩方程：构件各横截面上的剪力、弯矩表示为坐标位置 x 的函数，即表示剪力、弯矩随截面位置而变化的函数关系

$$F_S=F_S(x),\quad M=M(x)$$

剪力图与弯矩图：表示横截面上剪力、弯矩沿杆轴线变化规律的图线，即将剪力方程、弯矩方程用图线表示。

3. 荷载集度、剪力和弯矩间的关系

$$\frac{dF_S}{dx}=q,\quad \frac{dM}{dx}=F_S,\quad \frac{d^2M}{dx^2}=\frac{dF_S}{dx}=q$$

及利用关系作剪力图和弯矩图的规律。

4. 叠加法作内力图

思　考　题

1. 如何计算剪力和弯矩？如何确定其正负符号？
2. 列 $F_S(x)$ 及 $M(x)$ 方程时，在何处需要分段？
3. 如何确定最大弯矩？最大弯矩是否一定发生在剪力为零的横截面上？
4. 集中力及集中力偶作用的构件截面上的轴力、扭矩、剪力、弯矩如何变化？

习　题

11－1　试求图 11.21 所示各梁中指定截面上的剪力和弯矩。

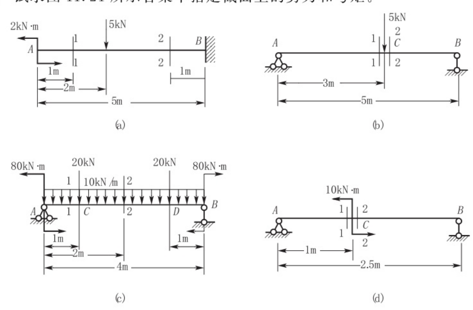


图 11.21

11－2　如图 11.22 所示试写出下列各梁的剪力方程和弯矩方程，并作剪力图和弯矩图。

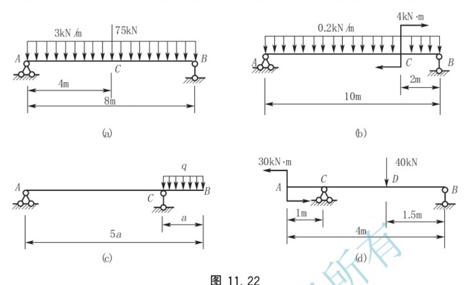


图 11.22

11－3　如图 11.23 所示，试利用荷载集度、剪力和弯矩间的微分关系作下列各梁的剪力图和弯矩图。

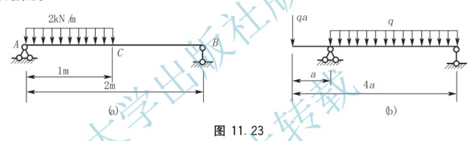


图 11.23

11－4　如图 11.24 所示，试作下列具有中间铰的梁的剪力图和弯矩图。

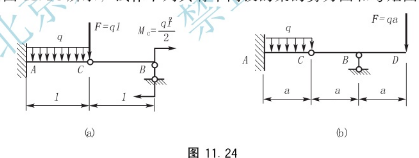


图 11.24

11－5　已知简支梁的剪力图如图 11.25 所示。试作梁的弯矩图和荷载图，已知梁上没有集中力偶作用。

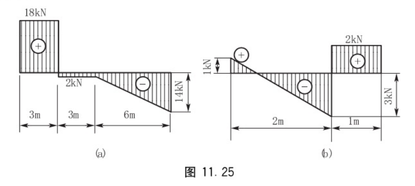


图 11.25

11－6　试根据弯矩、剪力与荷载集度之间的微分关系指出图 11.26 所示剪力图和弯矩图的错误。

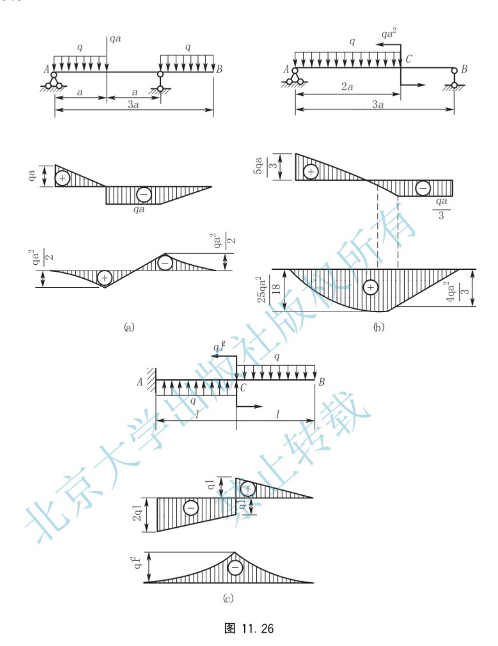


图 11.26

11－7　试根据图 11.27 所示简支梁的弯矩图作出梁的剪力图与荷载图。

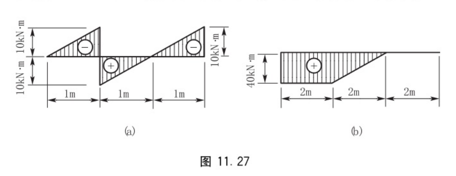


图 11.27

11－8　试用叠加法作图 11.28 所示各梁的弯矩图。

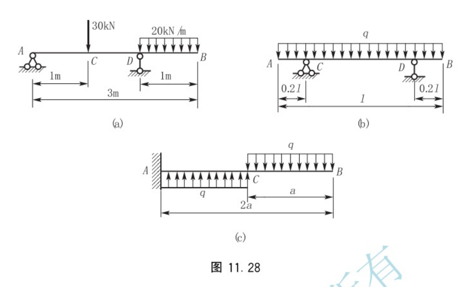


图 11.28

11－9　试作简支梁在图 11.29 所示 4 种荷载情况下的弯矩图，并比较其最大弯矩值。这些结果说明梁上的荷载不能任意用其静力等效力系代替，以及荷载分散作用时，使梁内$M_{\max}$下降的情况。

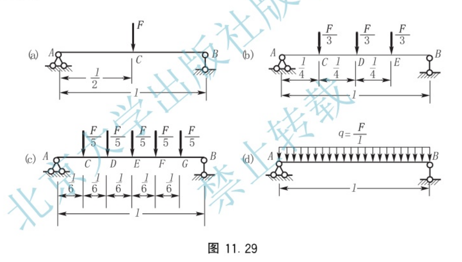


图 11.29

11－10　如欲使图 11.30 所示外伸梁的跨度中点处的正弯矩值等于支点处的负弯矩值，则支座到端点的距离 a 与梁长 l 之比 a/l 应等于多少？

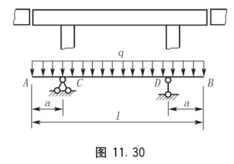


图 11.30

第12章
截面的几何性质

【教学提示】

在计算杆的应力和变形时，常常要用到杆横截面的几何性质，例如拉压杆的横截面积 A，扭转时的极惯性矩 I_P，以及后面要在梁的弯曲计算中用到的静矩、惯性矩等。本章主要介绍这些截面几何性质的定义和计算方法。

【学习要求】

明确静矩、惯性矩、惯性积、惯性半径，以及主惯性轴、主惯性矩的定义，并掌握其特征，熟悉常用的截面图形(如矩形、圆形)的形心主惯性矩的计算公式，并能正确应用平行移轴公式，计算组合图形的形心主惯性矩，了解较复杂的截面图形形心主惯性矩的计算步骤与方法。

12.1 静矩和形心

设一任意形状的截面，如图 12.1 所示，截面面积为 A。在截面中任取一微面积 dA，该微面积到两坐标轴的距离分别为 z 和 y，则 $y dA$ 和 $z dA$ 分别称为该面积元素 dA 对 z 轴和 y 轴的静矩。若沿着整个截面面积进行积分，可得到下列两个方程

图 12.1

$$S_z = \int_A y\,dA, \quad S_y = \int_A z\,dA \tag{12-1}$$

分别定义为该截面对 z 轴和 y 轴的静矩。截面的静矩是对于一定的轴而言的，同一截面对不同坐标轴有不同的静矩。由静矩公式可知，静矩可以是正值或负值，也可以是零，其单位为 m^3。

由理论力学中的合力矩定理可知，若将面积视为均质等厚度薄板，则其重心坐标为

$$y_c = \frac{\int_A y\,dA}{A}, \quad z_c = \frac{\int_A z\,dA}{A}$$

而均质薄板的重心与薄板平面图形的形心重合，所以，上式可用来计算截面的形心坐标。

$$y_c = \frac{S_z}{A}, \quad z_c = \frac{S_y}{A} \tag{12-2}$$

因此，若知道截面对于 z 轴和 y 轴的静矩，即可求得截面形心的坐标，若将公式改为

$$S_z = A y_c, \quad S_y = A z_c \tag{12-3}$$

则在已知截面面积以及形心坐标时，即可求得截面相对于 z 轴和 y 轴的静矩。因 y_c、z_c 为截面形心到 z 轴和 y 轴的距离，因此，若某一轴通过截面形心，则截面对这一轴的静矩为零；反之，若截面对某一轴的静矩为零，则此轴一定通过截面的形心。

若某一截面是由几个简单图形组成的，则称这一截面为组合截面。在计算组合截面对某个轴的静矩时，由于简单图形的面积及其形心位置均已知，可分别计算各简单图形对该轴的静矩，然后再代数求和，即

$$S_z = \sum_{i=1}^{n} A_i y_i,\quad S_y = \sum_{i=1}^{n} A_i z_i \tag{12-4}$$

式中 A_i，y_i，z_i 分别代表简单图形的面积和形心坐标，n 为简单图形的数量，将式(12-4)代入式(12-2)中可得计算组合截面形心坐标的公式为

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i},\quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \tag{12-5}$$

例 12.1 对称的 T 形梁截面尺寸如图 12.2 所示，求该截面的形心位置。

解：因图形相对于 y 轴对称，所以形心一定在该对称轴上，即 z_c 为零，下一步只要确定 y_c 的位置即可。y_c 是形心到 z 轴的距离，z 轴可视具体情况进行选取，若将截面下缘作为 z 轴，并将组合截面划分为Ⅰ、Ⅱ两个矩形，则有

$$A_{\text{Ⅰ}} = 0.072\text{m}^2,\quad A_{\text{Ⅱ}} = 0.008\text{m}^2$$

$$y_{\text{Ⅰ}} = 0.46\text{m},\quad y_{\text{Ⅱ}} = 0.2\text{m}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{A_{\text{Ⅰ}} y_{\text{Ⅰ}} + A_{\text{Ⅱ}} y_{\text{Ⅱ}}}{A_{\text{Ⅰ}} + A_{\text{Ⅱ}}} = 0.323\text{m}$$

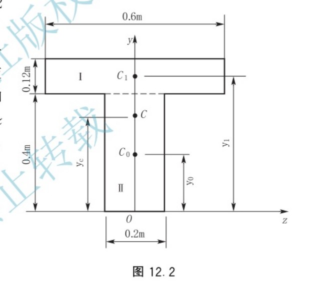


图 12.2

12.2 惯性矩和惯性积

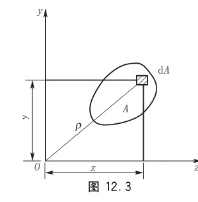


图 12.3

设一面积为 A 的任意形状截面如图 12.3 所示。在图形内任取一微面积 dA，则 dA 与其至坐标原点距离平方的乘积 $\rho^2\,dA$ 称为微面积对 O 点的极惯性矩 I_p。

$$I_p = \int_A \rho^2\,dA \tag{12-6}$$

上述积分应遍及整个截面面积 A，且恒为正值，单位为 m^4。

微面积 dA 与其至 z 轴或 y 轴距离平方的乘积 $y^2\,dA$ 或 $z^2\,dA$ 分别称为该面积元素对于 z 轴或 y 轴的惯性矩，若对

整个截面积分则得到截面对 z 轴和 y 轴的惯性矩，即为

$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A, \quad I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A \tag{12-7}$$

从图 12.3 中可知，$\rho^2 = z^2 + y^2$，则有

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_A (z^2 + y^2) \mathrm{d}A = I_y + I_z \tag{12-8}$$

此式表明，截面对一点的极惯性矩的数值，等于截面对以该点为原点的任意两正交坐标轴的惯性矩之和。

微面积 $\mathrm{d}A$ 与其分别至 z 轴和 y 轴距离的乘积 $yz\mathrm{d}A$，称为该微面积对于两坐标轴的惯性积，若对整个截面积分，则

$$I_{zy} = \int_A yz \mathrm{d}A \tag{12-9}$$

此为整个截面对于 z、y 两个轴的惯性积。同一截面对于不同坐标轴的惯性矩或惯性积一般是不同的。惯性矩的数值恒为正值，而惯性积则可能为正值或负值，也可能为零。若 z、y 两坐标轴中有一个为截面的对称轴，则其惯性积为零，惯性积的单位为 m^4。

在工程中，有时将惯性矩表示为截面面积 A 与某一长度平方的乘积，即

$$I_z = i_z^2 A, \quad I_y = i_y^2 A \tag{12-10}$$

式中，i_z 和 i_y 分别称为截面相对于 z 轴和 y 轴的惯性半径，单位为 m。当已知截面面积 A 和惯性矩 I_z 和 I_y 时，惯性半径即可由下式求得

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{12-11}$$

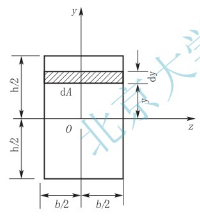


图 12.4

惯性矩、惯性积以及上节讨论的静矩等均属于平面图形的几何性质，本身是没有任何物理意义的。

例 12.2 图 12.4 为一矩形截面，z、y 轴均通过形心，且 z 轴平行于底边，y 轴平行于侧边，试计算该截面对 z 轴和 y 轴的惯性矩以及对 z、y 轴的惯性积。

解： 先计算对 z 轴的惯性矩。取平行于 z 轴的阴影部分作为微面积，则

$$\mathrm{d}A = b\mathrm{d}y$$

$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A = \int_{-h/2}^{h/2} by^2 \mathrm{d}y = \frac{bh^3}{12}$$

同理，可以求得对 y 轴的惯性矩为

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

下面讨论惯性积，若 z、y 两个坐标轴中有一个为截面的对称轴，则其惯性积为零。而图中两轴均为对称轴，因此其对 z、y 的惯性积为零。

例 12.3 试计算图 12.5 所示的圆截面对其形心轴(即直径轴)的惯性矩。

解： 以圆心为原点，选择坐标轴 z、y，如图 12.5 所示，取平行于 z 轴的阴影部分作为微面积，则

$$\mathrm{d}A = 2z\mathrm{d}y$$

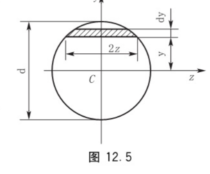


图 12.5

$$I_z=\int_A y^2\mathrm{d}A=\int_{-d/2}^{d/2}y^2\times 2z\mathrm{d}y=4\int_0^{d/2}y^2\sqrt{(d/2)^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

式中引用了 $z=\sqrt{(d/2)^2-y^2}$ 这一几何关系，并利用了截面对称于 z 轴的关系将积分下限进行了改动。利用积分公式可得

$$I_z=4\left\{-\frac{y}{4}\sqrt{[(d/2)^2-y^2]^3}+\frac{(d/2)^2}{8}\left[y\ \sqrt{(d/2)^2-y^2}+(d/2)^2\sin^{-1}\frac{y}{d/2}\right]\right\}_0^{d/2}=\frac{\pi d^4}{64}$$

利用圆截面的极惯性矩 $I_p=\frac{\pi d^4}{32}$，由于圆截面对于任一形心轴的惯性矩均相等，因而 $I_z=I_y$。由式(12-8)可知

$$I_z=I_y=\frac{I_p}{2}=\frac{\pi d^4}{64}$$

12.3 惯性矩和惯性积的平行移轴公式

设一面积为 A 的任意形状的截面如图12.6所示。截面对任意的 z、y 轴的惯性矩和惯性积分别为 I_z、I_y 和 I_{zy}。通过截面的形心 C 有分别平行于 z、y 轴的 z_c、y_c 轴，称为形心轴。截面对于形心轴的惯性矩和惯性积分别为 I_{z_c}、I_{y_c} 和 $I_{z_cy_c}$。

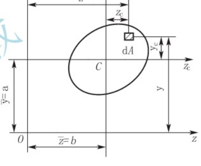


图 12.6

截面上任一微面积 $\mathrm{d}A$ 在两坐标系内的坐标 (z, y) 和 (z_c, y_c) 之间的关系为

$$z=z_c+b,\quad y=y_c+a \tag{a}$$

式中，a、b 是截面形心在 Ozy 坐标系内的坐标值，即先求截面对于 z 轴的惯性矩。根据定义，截面对于 z 轴的惯性矩为

$$I_z=\int_A y^2\mathrm{d}A$$

将式(a)代入可得

$$I_z=\int_A y^2\mathrm{d}A=\int_A(y_c+a)^2\mathrm{d}A=\int_A y_c^2\mathrm{d}A+2a\int_A y_c\mathrm{d}A+a^2\int_A\mathrm{d}A \tag{b}$$

根据惯性矩和静矩的定义，上式右端的各项积分分别为

$$\int_A y_c^2\mathrm{d}A=I_{z_c},\quad \int_A y_c\mathrm{d}A=S_{z_c},\quad \int_A\mathrm{d}A=A$$

其中因为 z_c 通过截面形心 C，因此第二项对 z_c 轴的静矩为零。于是式(b)可写为

$$I_z=I_{z_c}+a^2A \tag{12-12a}$$

同理

$$I_y=I_{y_c}+b^2A \tag{12-12b}$$

$$I_{zy}=I_{z_cy_c}+abA \tag{12-12c}$$

式(12-12)即为惯性矩及惯性积的平行移轴公式，式中的 a、b 两坐标值有正负号，可有截面形心 C 所在的象限来决定。在应用平行移轴公式时应注意，其中的 z_c、y_c 轴必须通过形心，否则不能应用。

12.4 主惯性轴和主惯性矩

1. 惯性矩和惯性积的转轴公式

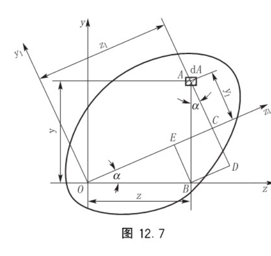


图 12.7

图 12.7 为一任意截面，z、y 为过任一点 O 的一对正交轴，z_1、y_1 为过 O 点的另一对正交轴，两对坐标成 α 角。截面对 z、y 轴的惯性矩 I_z、I_y 和惯性积 I_{zy} 均已知，现求截面对 z_1 轴和 y_1 轴的惯性矩 I_{z_1} 和 I_{y_1} 以及对 z_1、y_1 轴的惯性积 $I_{z_1y_1}$。

从图 12.7 中可以看出

$$z_1=\overline{OC}=\overline{OE}+\overline{BD}=z\cos\alpha+y\sin\alpha$$

$$y_1=\overline{AC}=\overline{AD}-\overline{EB}=y\cos\alpha-z\sin\alpha$$

先计算对 z_1 轴的惯性矩。根据定义，截面对 z_1 轴的惯性矩为

$$\begin{aligned}I_{z_1} &= \int_A y_1^2\,\mathrm{d}A = \int_A (y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2\,\mathrm{d}A \\ &= \cos^2\alpha\int_A y^2\,\mathrm{d}A - 2\sin\alpha\cos\alpha\int_A yz\,\mathrm{d}A + \sin^2\alpha\int_A z^2\,\mathrm{d}A \\ &= I_z\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - I_{zy}\sin 2\alpha\end{aligned}$$

将 $\cos^2\alpha=(1+\cos2\alpha)/2$ 和 $\sin^2\alpha=(1-\cos2\alpha)/2$ 代入上式，经整理可得

$$I_{z_1}=\frac{I_z+I_y}{2}+\frac{I_z-I_y}{2}\cos2\alpha-I_{zy}\sin2\alpha \qquad (12-13)$$

用同样的方法可得截面对 y_1 轴的惯性矩和对 z_1、y_1 轴的惯性积，即

$$I_{y_1}=\frac{I_z+I_y}{2}-\frac{I_z-I_y}{2}\cos2\alpha+I_{zy}\sin2\alpha \qquad (12-14)$$

$$I_{z_1y_1}=\frac{I_z-I_y}{2}\sin2\alpha+I_{zy}\cos2\alpha \qquad (12-15)$$

式(12－13)、式(12－14)和式(12－15)就是惯性矩和惯性积的转轴公式。式中 α 角的正负号规定如下：若以 z 轴为基线，逆时针转为正，顺时针转为负。

2. 主惯性轴和主惯性矩

由式(12－15)可知，当 α 变化时，惯性积的值也随之变化，可以是正值、负值，也可以是零。因此随着角度 α 的变化，总可以找到一对坐标轴 z_0、y_0，使惯性积等于零，这时的 z_0 轴和 y_0 轴就称为主惯性轴或简称为主轴，截面对主轴的惯性矩称为主惯性矩。下面讨论如何确定主轴的位置和进行主惯性矩值的计算。

设 α_0 为主轴与原坐标轴间的夹角，根据主惯性矩的定义，将其代入式(12－15)中，并让惯性积为零，即

$$I_{z_0y_0}=\frac{I_z-I_y}{2}\sin2\alpha_0+I_{zy}\cos2\alpha_0=0$$

从而得到

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y} \tag{12-16}$$

通过此式可以确定主轴的位置，将得到的角 α_0 代入式(12－13)和式(12－14)中即可得到截面的主惯性轴。为了计算方便，可直接导出主惯性矩的计算公式，为此，通过式(12－13)可得

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\alpha_0}} = \frac{I_z - I_y}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}}$$

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{\tan 2\alpha_0}{\sqrt{1+\tan^2 2\alpha_0}} = \frac{-2I_{zy}}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}}$$

再将这两个式子代入式(12－13)和式(12－14)中，整理后可得主惯性矩的计算公式

$$I_{z_0} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \tag{12-17a}$$

$$I_{y_0} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \tag{12-17b}$$

这两个主惯性矩是截面对通过 O 点各轴的惯性矩中的最大值和最小值。过截面上的任一点均可找到一对主轴。通过截面形心的主轴称为形心主轴，对形心主轴的惯性矩称为形心主惯性矩。具有对称轴的截面如矩形、圆形、工字形等，其对称轴即为形心主轴，因为对称轴既是主轴又通过形心。

12.5 组合截面惯性矩的计算

在工程中常会遇到组合截面，需要计算其惯性矩和惯性积。根据惯性矩和惯性积的定义可知，组合截面对某一坐标轴的惯性矩或惯性积就等于其各个组成部分(简单图形)对同一坐标轴的惯性矩或惯性积之和。若截面有 n 个组成部分，则组合截面对于 z、y 两轴的惯性矩和惯性积分别为

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} I_{zi}, \quad I_y = \sum_{i=1}^{n} I_{yi}, \quad I_{zy} = \sum_{i=1}^{n} I_{zyi}$$

式中的 I_{zi}、I_{yi} 和 I_{zyi} 分别为组合截面中第 i 个组成部分对于 z、y 两轴的惯性矩和惯性积。

在计算组合截面的形心主惯性矩时，应首先确定组合截面形心位置，然后过形心选择一条便于计算惯性矩和惯性积的坐标轴，计算出组合截面对这个轴的惯性矩和惯性积，再通过式(12－16)和式(12－17)确定形心主轴的位置和截面对形心主轴的惯性矩。

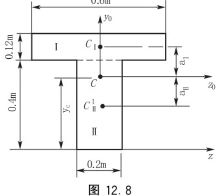
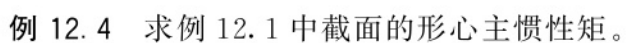


图 12.8



例 12.4　求例 12.1 中截面的形心主惯性矩。

解： 通过例 12.1 已经确定了形心位置

$$z_c = 0, \quad y_c = 0.323\text{m}$$

截面为对称截面，因此对称轴 y_0 为一形心主轴，C 点在轴上，进而可以确定另一形心主轴 z_0，如图 12.7 所示。z_0 轴到两个矩形形心的距离分别为

$$a_{\text{I}} = 0.137\text{m}, \quad a_{\text{II}} = 0.123\text{m}$$

截面对 z_0 轴的惯性矩为两个简单矩形对 z_0 轴的惯性矩之和，即

$$\begin{aligned} I_{z_0} &= I_{z_{C\text{I}}}^{\text{I}} + A_{\text{I}} a_{\text{I}}^2 + I_{z_{C\text{II}}}^{\text{II}} + A_{\text{II}} a_{\text{II}}^2 \\ &= \left(\frac{0.6\text{m} \times (0.12\text{m})^3}{12} + 0.6\text{m} \times 0.12\text{m} \times (0.137\text{m})^2 + \frac{0.2\text{m} \times 0.4\text{m}^3}{12} \right. \\ &\quad \left. + 0.2\text{m} \times 0.4\text{m} \times (0.123\text{m})^2 \right) \\ &= 0.37 \times 10^{-2}\text{m}^4 \end{aligned}$$

截面对 y_0 轴的惯性矩为

$$\begin{aligned} I_{y_0} &= I_{y_0}^{\text{I}} + I_{y_0}^{\text{II}} = \left(\frac{0.12\text{m} \times (0.6\text{m})^3}{12} + \frac{0.4\text{m} \times (0.2\text{m})^3}{12} \right) \\ &= 0.242 \times 10^{-2}\text{m}^4 \end{aligned}$$

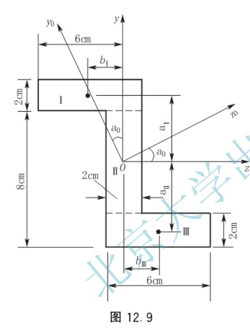


图 12.9

例 12.5 求图 12.9 所示图形的形心主轴和形心主惯性矩。

解： 将该图视为由Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ共 3 个矩形组成的组合截面，显然组合截面的形心与矩形Ⅱ的形心重合。为了计算形心主轴的位置和形心主轴的数值，首先过形心选择一对便于计算惯性矩和惯性积的 z、y 轴，如图 12.9 所示，z 轴平行于底边。矩形Ⅱ的形心在原点，矩形Ⅰ、Ⅲ的形心在所选坐标系中的坐标为

$$\begin{cases} a_{\text{I}} = 0.04\text{m} \\ b_{\text{I}} = -0.02\text{m} \end{cases} \quad \begin{cases} a_{\text{III}} = -0.04\text{m} \\ b_{\text{III}} = 0.02\text{m} \end{cases}$$

组合截面对 z、y 轴的惯性矩和惯性积分别为

$$\begin{aligned} I_z &= 2\left[\frac{0.06\text{m} \times (0.02\text{m})^3}{12} + 0.06\text{m} \times 0.02\text{m} \times (0.04\text{m})^2 \right]\text{m}^4 + \frac{0.02\text{m} \times (0.06\text{m})^3}{12} \\ &= 0.428 \times 10^{-5}\text{m}^4 \\ I_y &= 2\left(\frac{0.02\text{m} \times 0.06\text{m}^3}{12} + 0.06\text{m} \times 0.02\text{m} \times 0.02\text{m}^2 \right)\text{m}^4 + \frac{0.06\text{m} \times 0.02\text{m}^3}{12} \\ &= 0.172 \times 10^{-5}\text{m}^4 \\ I_{zy} &= [0.04\text{m} \times (-0.02\text{m}) \times 0.06\text{m} \times 0.02\text{m} + (-0.04\text{m}) \times 0.02\text{m} \times 0.06\text{m} \times 0.02\text{m}] \\ &= -0.192 \times 10^{-5}\text{m}^4 \end{aligned}$$

将求得的 3 个值代入式(12-16)中得

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y} = -\frac{2 \times (-0.192 \times 10^{-5})\text{m}^4}{(0.428 \times 10^{-5} 0.172 \times 10^{-5})\text{m}^4} = 1.5$$

则有 $\alpha_0 = 0.491\text{rad}$。

则形心主轴 z_0 为从轴 z 逆时针转 0.491rad 得到的轴，另一形心主轴 y_0 与 z_0 垂直。

将 I_z、I_y 和 I_{zy} 值代入式(12－17)中可得

$$I_{z_0}=I_{\max}=\frac{I_z+I_y}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(I_z-I_y)^2+4I_{zy}^2}$$
$$=\frac{(0.428+0.172)\times10^{-5}}{2}\text{m}^4+\frac{1}{2}\sqrt{[(0.428-0.172)\times10^{-5}]^2+4(0.192\times10^{-5})^2}\text{m}^4$$
$$=0.531\times10^{-5}\text{m}^4$$
$$I_{z_0}=\frac{I_z+I_y}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(I_z-I_y)^2+4I_{zy}^2}=0.69\times10^{-6}\text{m}^4$$

本章小结

1. 静矩与形心

截面对于 z 轴和 y 轴的静矩：

$$S_z=\int_A y\,\mathrm{d}A,\quad S_y=\int_A z\,\mathrm{d}A$$

形心坐标：

$$y_c=\frac{S_z}{A},\quad z_c=\frac{S_y}{A}$$

2. 惯性矩与惯性积

截面对 z 轴和 y 轴的惯性矩：

$$I_z=\int_A y^2\mathrm{d}A,\quad I_y=\int_A z^2\mathrm{d}A$$

截面对一点的极惯性矩：

$$I_p=\int_A \rho^2\mathrm{d}A=\int_A(z^2+y^2)\mathrm{d}A=I_y+I_z$$

截面对于两坐标轴的惯性积：

$$I_{zy}=\int_A yz\,\mathrm{d}A$$

惯性半径：

$$i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}},\quad i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

3. 平行移轴公式

$$I_z=I_{z_c}+a^2A$$
$$I_y=I_{y_c}+b^2A$$
$$I_{zy}=I_{z_cy_c}+abA$$

其中，a 为截面形心到 z 轴的距离，b 为截面形心到 y 轴的距离。

4. 主惯性轴的求解

首先任取一对通过形心便于计算惯性矩的坐标轴 z、y，计算出截面对 z、y 轴的惯性矩 I_z、I_y 和惯性积 I_{zy}。

由下式求解主惯性轴与原坐标轴间的夹角 α_0

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}$$

从而可以确定主惯性轴的位置，进而可以得到主惯性矩为

$$I_{z_0} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}$$

$$I_{z_0} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}$$

5. 组合截面惯性矩的计算

若截面有 n 个组成部分，则组合截面对于 z、y 两个轴的惯性矩和惯性积分别为

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} I_{zi}, \quad I_y = \sum_{i=1}^{n} I_{yi}, \quad I_{zy} = \sum_{i=1}^{n} I_{zyi}$$

思　考　题

1. 如图 12.10 所示，各截面图形中的 C 是形心。哪些截面图形对坐标轴的惯性积等于零？哪些不等于零？

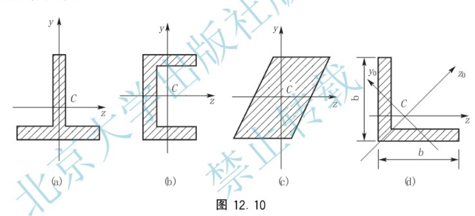


图 12.10

2. 试问图 12.11 所示的两个截面的惯性矩 I_z 是否可按照 $I_z = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_0 h_0^3}{12}$ 来计算？

3. 由两根同一型号的槽钢组成的截面如图 12.12 所示。已知每根槽钢的截面面积为 A，对形心轴 y_0 的惯性矩为 I_{y_0}，并且 y_0、y_1 和 y 为相互平行的 3 根轴。试问在计算截面对 y 轴的惯性矩 I_y 时，应选用下列哪一个算式？

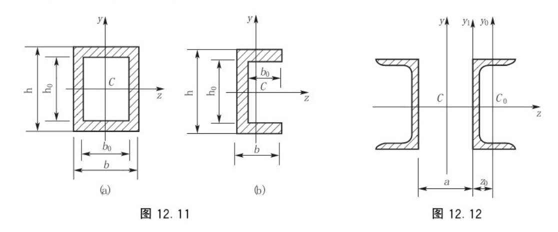


图 12.11　　图 12.12

（1）$I_y = I_{y_0} + z_0^2 A$；

（2）$I_y = I_{y_0} + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 A$；

（3）$I_y = I_{y_0} + \left(z_0 + \dfrac{a}{2}\right)^2 A$；

（4）$I_y = I_{y_0} + z_0^2 A + z_0 a A$；

（5）$I_y = I_{y_0} + \left[z_0^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2\right] A$。

4. 图 12.13 所示为从一个等边三角形中心挖去一个半径为 r 的圆孔的截面。试证明该截面通过形心 C 的任一轴均为形心主惯性轴。

5. 直角三角形截面斜边中点 D 处的一对正交坐标轴 z、y 如图 12.14 所示，试问

（1）z、y 是否为一对主惯性轴？

（2）不用积分，计算其 I_z 和 I_{zy}。

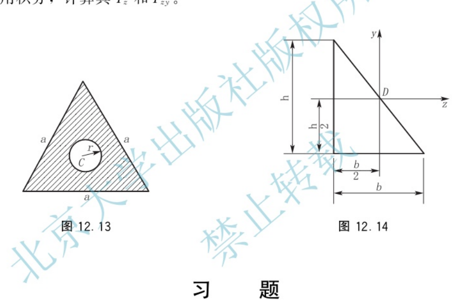


图 12.13　　　图 12.14

习　　题

12－1　确定图 12.15 所示各图形心的位置。

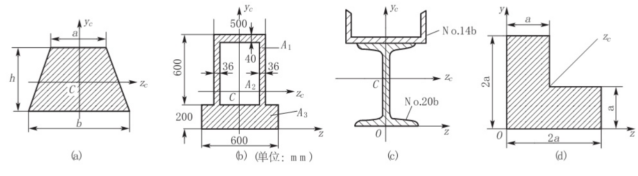


图 12.15

12－2　试求图 12.16 所示各截面的阴影面积对 z 轴的静矩(图中单位：mm)。

12－3　试计算图 12.15 中各平面图形对形心轴 z_c 的惯性矩。

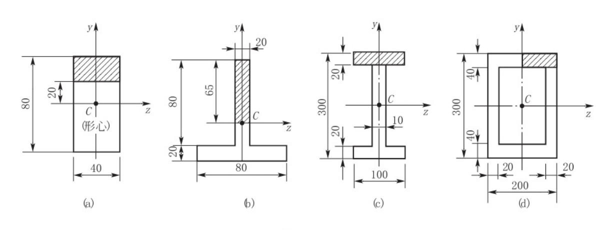


图 12.16

12-4　试分别求图 12.17 所示环形和箱型截面对其对称轴 z_c 的惯性矩(图中单位：mm)。

12-5　求图 12.18 所示三角形截面对过形心的 z_0 轴(z_0 轴平行于底边)与 z_1 轴的惯性矩。

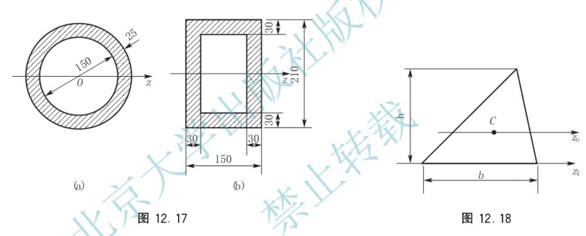


图 12.17　　　　图 12.18

12-6　图 12.19 中的 z 轴与 z_1 轴平行，两个轴间的距离为 a，如截面对 z 轴的惯性矩 I_z 已知，问按式 $I_{z_1}=I_z+a^2bh$ 来计算 I_{z_1} 是否正确？

12-7　试用积分法求图 12.20 所示半圆形截面对 z 轴的静矩，并确定其形心的坐标。

12-8　试求图 12.21 所示 $r=1\text{m}$ 的半圆形截面对 z 轴的惯性矩，其中 z 轴与半圆形的底边平行，相距 1m。

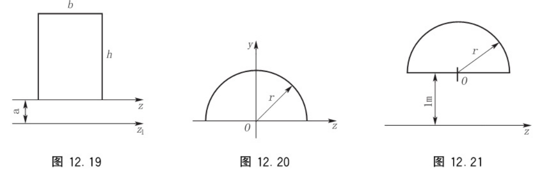


图 12.19　　　　图 12.20　　　　图 12.21

12-9　试求图 12.22 所示各截面对其形心轴 z 的惯性矩。

12-10　在直径 $D=8a$ 的圆截面中，开了一个 $2a\times4a$ 的矩形孔，如图 12.23 所示，

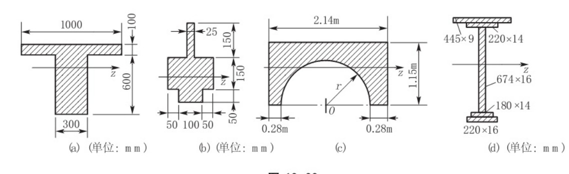


图 12.22

试求截面对其水平形心轴和竖直形心轴的惯性矩。

12－11　正方形截面中开了一个直径 $d=100\text{mm}$ 的半圆形孔，如图 12.24 所示。试确定截面的形心位置，并计算对水平形心轴和竖直形心轴的惯性矩(图中单位：mm)。

12－12　求图 12.25 所示截面的形心主轴的位置和形心主惯性矩的数值。

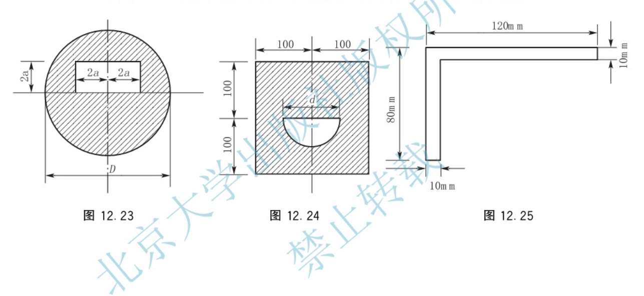


图 12.23　　图 12.24　　图 12.25